# TEORIA DEL «CIERRE CATEGORIAL» APLICADO A LAS MATEMATICAS

*Julián Velarde Lombraña*

## *I. Naturaleza de las Matematicas*

En las clasificaciones usuales de las ciencias las Matemáticas aparecen junto con la Lógica entre las llamadas *Cc. Formales* frente a las llamadas *Cc. Naturales* y también frente a las *Cc. Humanas*[1].

Ahora bien, muchas de tales clasificaciones adolecen de criterios rigurosos, de una auténtica idea de ciencia tal que: (1) permita separar las disciplinas científicas de las que no lo son, y (2) permita separar las Cc. Formales de las Cc. Naturales o de las Cc. Humanas. Lo que se busca, pues, es (1) un análisis gnoseológico de una disciplina dada su naturaleza gnoseológica interna, en este caso de las Matemáticas, y (2) una clasificación gnoseológica de las ciencias que ubique a las Matemáticas en la República de las ciencias.

Para lo primero es preciso disponer de una idea de «ciencia» que posibilite un análisis riguroso. Utilizamos aquí la idea de ciencia configurada desde la Teoría del «cierre categorial», teoría elaborada por G. Bueno[2] y que él mismo y otros de su equipo hemos aplicado al análisis de varias disciplinas: la Economía, la Lingüística, etc.

---

[1] *Confert.*, por ej. Wundt, W.: *Principios de Filosofía*, VII; Rougier, *Traité de la Connaisance*, París, 1955, pp. 37-38; Carnap, *Einführung in die Symbolische Logik*, Viena, Springer, 1954, p.1.

[2] *Idea de ciencia desde la teoría del cierre categorial*, Santander, Univ. Internacional M. Pelayo, 1976; «En torno al concepto de ciencias humanas», *El Basilisco*, 2 (1978), 12-46; «El cierre categorial aplicado a las ciencias físico-químicas», en *Actas del I Congreso Teoría y Metodología de las Ciencias*, Oviedo, Pentalfa, 1982, pp. 101-175; y otros varios trabajos en *El Basilisco*.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

Los términos de la expresión «cierre categorial» provienen, respectivamente, de las Matemáticas y de la Filosofía.

En las primeras se habla de *operaciones cerradas* o de *conjuntos cerrados* o de *sistemas axiomáticos cerrados* frente a operaciones o conjuntos o sistemas *abiertos*. Una operación es cerrada o interna con respecto a un conjunto de términos si, aplicada a dos cualesquiera de éstos, el término resultante pertenece también al conjunto. Por ejemplo, la operación «x» es interna al conjunto de los números naturales. Habida cuenta de que cuando hablamos de «cierre categorial» no nos referimos a una operación aislada respecto de un conjunto, sino, más bien, a un sistema de operaciones respecto de un conjunto de varias clases de términos.

En filosofía, la noción de «categoría» es susceptible (y así se toma aquí) como equivalente a «concepto» y en cuanto contrapuesto a «idea». Las categorías o conceptos son las nociones que nacen, se originan y se mantienen en un ámbito específico disciplinar sin perjuicio de que en un momento dado puedan trascender ese ámbito, en cuyo caso dejan de ser categorías para convertirse en ideas. Las ideas, a su vez, pueden influir en las categorías reorganizándolas de otro modo. La noción de «función», por ejemplo, fue, en un principio, una categoría de las Matemáticas. Nació en el siglo XVII con Fermat, pero sólo como conjunto de operaciones a efectuar. Se aplica de forma especial a partir de la creación del cálculo integral (Leibniz) y de los desarrollos por parte de Bernoulli, Euler y Weierstrass, funcionando como categoría estrictamente aritmética: función analítica, pero que desborda, por otra parte, el campo de la Aritmética; y así, en Riemann y Dirichlet función es toda correspondencia entre dos conjuntos. Al campo de la Lógica pasa de la mano de Boole y especialmente de la de Frege. Frege amplía el círculo de las operaciones del cálculo que contribuyen a la creación de una función, y asimismo amplía el círculo de lo que puede aparecer como argumento y como valor de una función. Con el análisis de las proposiciones como descompuestas en dos partes, «argumento» y «función», las categorías específicas de la lógica («concepto», «proposición», «predicado», «relación», etc.) sufren una nueva reorganización. Y, a su vez, esta idea de función le sirve a Frege para reorganizar las categorías específicas de la Aritmética. Critica la idea de función de Dirichlet (a quien siguieron Riemann, Hankel y Dedekind): correspondencia entre clases de objetos cualesquiera (no restringidos a clases de números), porque la noción de «clase» es, para Frege, algo derivado. No cabe determinar la noción de «función» a partir de la noción de «clase» sino viceversa. La noción de «función» así entendida es más amplia que la tradicional matemática. Pero que le permite a Frege alcanzar las categorías específicas de la Aritmética: los números.

### *I.1. Análisis gnoseológico de una ciencia*

Según la teoría de «cierre categorial», una ciencia no queda definida por su objeto formal, sino por una multiplicidad de objetos. Por ej., la lingüística queda definida, no como la ciencia del lenguaje, sino por una esfera de categorías (o

Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

conceptos): fonemas, diptongos, monemas, sílabas, etc. El campo de una disciplina no constituye un conjunto o clase homogénea, sino un conjunto de clases, de partes formales cuya unidad debe ser determinada desde su interior a partir de los propios nexos que enlazan esas partes. El campo de una ciencia deberá constar, pues, de más de una clase de términos. Y esas diversas clases están vinculadas no sólo por relaciones de semejanza o de identidad, sino también por relaciones de diversidad o de sinexión (unión necesaria de los términos sin perjuicio de su diversidad). Así, en Lógica, una clase $\alpha$ puede estar formada por el conjunto de los *valores* (dos en Lógica bivalente; más de dos en Lógica polivalente), y una clase $\beta$, por el conjunto de las *variables* (variables proposicionales, predicativas, etc.) que, a su vez, constituyen configuraciones de otras clases, como puede ser la clase de las *funciones* (funciones de un argumento, de dos, de tres, etc.), de suerte que las variables proposicionales vendrían ahora determinadas por las funciones de cero argumentos.

En Matemáticas, una clase $\alpha$ puede estar formada por el conjunto de las *series* (convergentes, divergentes, oscilantes, finitas, infinitas, etc.) y una clase $\beta$ por el conjunto de los *números* (naturales, primos, etc.) respecto de unas u otras series. Entre esas clases median relaciones de sinexión, por cuanto que una serie puede venir configurada a través de un proceso operatorio sobre otra; así, por ejemplo, si de la serie de los cuadrados de los enteros $0^2$, $1^2$, 4, 9, 16, 25, 36... restamos de cada uno de ellos el anterior, obtenemos la serie de los impares 1, 3, 5, 7, 9, 11... de suerte que la serie de los impares aparece ahora, no como primitiva, sino como configurada a partir de otra tomada como primitiva, y ello en virtud de un proceso operatorio presidido por la ley (identidad sintética), según la cual la diferencia entre los términos *n–simo* y *(n–1)–simo* de la sucesión de cuadrados es:

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

Los términos dados no son, pues, entidades primitivas, atómicas; y no sólo porque podemos distinguir en ellos componentes más complejos, por ejemplo, el número de argumentos que posee una función en Lógica, o bien el número de términos de una serie si es finita o infinita en Matemáticas, sino porque se hace preciso distinguir distintos estratos o niveles que exigen atribuir una estructura matricial a esos términos primitivos. Los términos dados son primitivos o simples en la medida en que se combinan con otros formando configuraciones; en la medida en que se establecen relaciones y operaciones entre ellos. Por ej. el conjunto $\{\varnothing\}$ es tomado como término primitivo, sujeto a relaciones y operaciones con otros términos primitivos $\{x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$ incluidos en el conjunto X, en tanto que aparece, por ej. en la configuración $\{x_1\} \cap \{x_2, x_3\} = \{\varnothing\}$.

Los términos primitivos, en cuanto dados, constituyen el campo material de la disciplina en cuestión. Cuando entre ellos se dan ciertas relaciones y operaciones tales que nos permiten pasar de términos a configuraciones y viceversa, es decir, cuando queda el campo «cerrado» categorialmente, se constituye la ciencia en cuestión.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

El grado de cientificidad de una disciplina corresponde, según esto, al grado de su cierre categorial. Unas disciplinas están más cerradas que otras; y, dentro de una disciplina, unas partes están más cerradas que otras. El criterio es, pues: con respecto a tales y cuales relaciones y operaciones la Aritmética está más sistematizada que la Teoría de Conjuntos, por ej.; o el cálculo de clases más cerrado que el de relaciones. La constitución de un campo cerrado de categorías viene, por lo demás, determinado dentro de un proceso histórico-cultural muy preciso. Así, en el siglo XIX se inicia el proceso de rigorización del análisis en el que toman parte Cauchy, Weierstrass, Abel, Jacobi... y culmina con Dedekind.

La categoría misma de «función» era controvertida entre los matemáticos. Bolzano inicia en 1817 el estudio de las propiedades de las funciones. Examina las diferentes demostraciones del teorema fundamental del álgebra: «toda función algebraica racional de una variable puede ser descompuesta en factores reales de primer o de segundo grado». Todas las pruebas (desde la primera ofrecida por Gauss en 1799) caen en la alternativa: círculo vicioso o recurso a la intuición geométrica. Para escapar a ésta busca Bolzano un «fundamento objetivo» en las definiciones. Y, así, pasa a ofrecer la definición de continuidad en sentido moderno; definición que será perfeccionada por Weierstrass. En esta definición, como en la demostración del teorema que establece la existencia de ceros en las funciones continuas [si f(x) es continua en el intervalo [a, b] y en los extremos toma valores f(a) y f(b) de signos opuestos, entonces f(x) posee al menos un valor igual a cero entre *a* y *b*], Bolzano apela a categorías aritméticas; y, como Bolzano, también Cauchy fundamenta el concepto de límite en consideraciones estrictamente aritméticas. Y, finalmente, con Dedekind [*Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872)] culmina el proceso llamado «aritmetización del análisis». Mediante el procedimiento de las «cortaduras» establece una fundamentación teórica definitiva de los números reales, reconstruyendo éstos a partir de los racionales y, por tanto, a partir de los naturales (ya que los racionales son fácilmente definibles en términos de los naturales). Con ello todo el Análisis (cálculo diferencial e integral) puede ser tratado en términos de números naturales y su aritmética, mostrando así la posibilidad de reconstruir la matemática sobre la base de un reducido número de categorías elementales de la Aritmética. Pero culminada esta etapa, este «cierre aritmético», otra nueva tarea emprenden Dedekind y Frege en los años 80: la tarea logicista de fundamentar la Aritmética reconstruyendo sus categorías sobre categorías lógicas.

Este es el contexto histórico-cultural, en el que se plantea la reconstrucción de una de las ramas principales de las Matemáticas, la Aritmética. A partir de este contexto nos parece que resulta también pertinente aplicar el análisis gnoseológico desde la teoría del «cierre categorial» restringido a la Aritmética.

Con la «aritmetización del Análisis», muchos matemáticos creyeron haber obtenido la rigorización y fundamentación de las Matemáticas. Estas quedaban «cerradas» aritméticamente; podían ser construidas desde categorías únicamente aritméticas. Esa era la verdad de la frase de Kronecker: «El buen Dios

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

ha creado los números enteros; todo lo demás es obra del hombre». Sin embargo, Dedekind y Frege van más allá de Kronecker. Su proyecto consiste en reconstruir las categorías aritméticas desde categorías lógicas. ¿Ha resultado o puede resultar ello posible? Frege, sobre todo, en su intento, pasa revista a otros proyectos, a otras alternativas, que sitúan el campo material y los contenidos de la Aritmética fuera de donde él los sitúa, fuera de la Lógica, de manera que completando su examen podemos, primero, analizar las alternativas posibles (que de hecho han sido propuestas) sobre los contenidos del campo de la Aritmética. Para organizar el examen de estas alternativas utilizaremos el siguiente criterio. Consideramos que en la estructura aritmética hay tres componentes (o bien que el espacio aritmético está limitado por tres clases de elementos): los sujetos, los objetos y el lenguaje.

Que los sujetos sean componentes indispensables de la estructura aritmética, por cuanto que sin la presencia de los sujetos (sujetos gnoseológicos, sobre los que luego volveremos) no habría Aritmética, consideramos no necesita mayor justificación.

También consideramos superfluo justificar la necesidad de los objetos como componentes de la estructura aritmética: sin objetos no habría Aritmética.

La justificación del lenguaje (de los signos) como componente esencial y necesario de la estructura aritmética es ya más complicada. Es indiscutible, en primer lugar, que la Aritmética, como también las restantes ciencias, está vinculada al lenguaje. Mas es, precisamente, la naturaleza del vínculo lo que se discute, lo que hay que dilucidar. Pues bien, consideramos que la vinculación es interna, en el sentido de que sin lenguaje no podría ser pensada la racionalidad científica, si bien esta racionalidad no se reduce al marco estrictamente lingüístico. Toda ciencia (y toda disciplina) exige un lenguaje (libros, vocabulario de términos específicos, etc.) que, en su función pragmática, tiene como objetivo recoger e indicar los métodos de conducta de los sujetos para «reproducir» o «reiterar» los objetos que constituyen el campo de tal disciplina. Esos objetos que constituyen el campo de la disciplina guardan cierto tipo de relaciones y son sometidos a cierto tipo de operaciones; mas esas relaciones y operaciones no subsisten ni son posibles al margen de los sujetos que los cultivan (que en tal disciplina se pueda prescindir de tal o cual sujeto no quiere decir que se pueda prescindir de todos los sujetos). Los sujetos, ciertamente, son intercambiables, sustituibles; pero tal sustitución queda posibilitada por esa función pragmática del lenguaje. Es el lenguaje el que preside, el que sirve para establecer la conexión entre la actividad subjetiva entre los objetos y la recurrencia de esa actividad. El lenguaje es el cauce de la interconexión entre las operaciones intrasubjetivas (enlace de las operaciones y sensaciones pasadas, presentes y futuras del sujeto gnoseológico consigo mismo = autologismo, necesidad de la «memoria») y de las operaciones intersubjetivas (enlace entre los diversos sujetos dedicados a la construcción científica posibilitadora de la sistematización de los múltiples contenidos de la ciencia).

Ahora bien, el lenguaje (los signos) es un componente esencial y necesario de la Aritmética no sólo desde la perspectiva «pragmática», sino desde el eje

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

«semántico», en el sentido de que sin lenguaje no habría Aritmética, por cuanto que la Aritmética viene dada en fórmulas lingüísticas y desde la perspectiva del «materialismo formalista» (a la que luego haremos referencia más explícita) las fórmulas de las ciencias formales llevan en su propia *suppositio materialis*, en su ser significantes, su propio contenido material, su propio significado. Los símbolos lógicos, matemáticos, constituyen el propio contenido material y llevan incluidas estructuras lógicas y matemáticas particulares.

Con estas distinciones creemos poder pasar revista de forma crítica y gnoseológicamente positiva a las diversas teorías sobre los contenidos del campo de la Aritmética, restringiéndonos, como antes hemos señalado, al período que se inicia con la «fundamentación de la Aritmética» y ateniéndonos al orden seguido por Frege en su exposición crítica.

### *I.2. Teorías sobre la Aritmética*

Partiendo, pues, de que en el campo de la Aritmética entran tres componentes (o bien que el espacio aritmético está limitado por tres clases de elementos formando un triángulo): los sujetos, los objetos y el lenguaje, las teorías que efectivamente se han presentado con pretensiones de determinar el campo de la Aritmética quedan agrupadas en cada uno de los lados del triángulo:

A) Teorías que ponen la Aritmética en el lado del sujeto sea éste empírico (*psicologismo*), sea el sujeto «trascendental» (*trascendentalismo*).

El *psicologismo* hunde sus raíces en ciertas definiciones de Aristóteles que hacen descansar los axiomas en la evidencia. El término «psicologismo» fue usado por primera vez en Alemania para designar las doctrinas de Fries y Beneke, quienes critican el apriorismo trascendental kantiano, aunque manteniendo la forma *a priori* entendida en sentido psicológico. Las leyes de la Aritmética como las de la Lógica son, para Fries, no leyes de las cosas, sino leyes de la «pensabilidad de las cosas». Esta dirección psicologista es la que sigue también Husserl en su *Filosofía de la Aritmética* (1891), antes de conocer la crítica de Frege al psicologismo.

El psicologismo está arraigado en multitud de teorías: Boole pensaba estar describiendo las leyes del pensamiento cuando escribía sus obras de álgebra. Si la ley «de dualidad» (la más fundamental, según él, del álgebra booleana) es $x^2=x$ y no $x^3=x$, es porque nuestro pensamiento, opina Boole, funciona por dicotomías y no por tricotomías.

También para Mill, las leyes de la Aritmética se basan, bien en la experiencia familiar, bien en un viejo y familiar hábito de pensar. Su psicologismo unido a su empirismo hacen de las verdades fundamentales de la Aritmética evidencias de los sentidos; simples generalizaciones inductivas a partir de hechos observados; esas verdades nos son conocidas por la primitiva y constante experiencia.

El psicologismo empirista de Mill quedó triturado por Frege en sus *Fundamentos de la Aritmética*, obra en la que también ataca el subjetivismo trascendental kantiano. Kant entiende el método matemático como construcción, esto

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

es, como la introducción de elementos particulares (los números) en cuanto distintos de los conceptos generales, por eso reclama para esa construcción el carácter de sintética. Los juicios aritméticos «7+5=12» por ej. son sintéticos, y son *a priori*; los conceptos que los componen nos vienen dados en la *intuición*, y por lo tanto *a priori*: «todo conocimiento matemático tiene esta peculiaridad: debe, primero, exhibir sus conceptos *en la intuición* y hacerlo así *a priori*; en una intuición que no es empírica, sino pura; sin esto las matemáticas no pueden dar un paso»[3].

Otros, después de Kant, han mantenido la fundamentación de la matemática en la intuición, entendida ésta, bien en sentido kantiano, bien en otros sentidos.

Para Kronecker toda operación sobre entes matemáticos, y principalmente sobre números naturales encuentra su fundamento en la intuición; ni la teoría de conjuntos, ni la construcción de los números reales, ni (en el fondo) ninguna construcción matemática puede basarse en el infinito actual.

Poincaré, en otro sentido, entiende la intuición como una facultad innata, una especie de «adivinación» o una «iluminación súbita que invade el espíritu del matemático y que permite la invención matemática»[4]. «Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, son silogismos colocados en un cierto orden, y el orden en el cual están colocados estos elementos es mucho más importante que ellos mismos». A través de la intuición de ese orden tenemos todos los elementos y «esta intuición del orden matemático es la que hace al matemático adivinar las armonías y las relaciones ocultas»[5].

El intuicionismo de Brouwer y Heyting, por su parte, constituye una de las alternativas más sólidas a la fundamentación de la Matemática. «La Matemática, según Heyting, se identifica con la parte exacta de nuestro pensamiento»; y también: «La Matemática intuicionista consiste en construcciones mentales» y «el pensamiento matemático no nos proporciona verdad alguna acerca del mundo exterior, sino que sólo se ocupa de construcciones mentales»[6] y «la matemática intuicionista es un fenómeno de la vida, una actividad natural del hombre»[7].

Los intuicionistas reclaman el criterio cartesiano de verdad: la evidencia. Mientras que los formalistas en su axiomática formal evitan todo recurso a evidencias no controladas y renuncian a apoyarse en representaciones sensibles para figurar objetos ideales, los intuicionistas fijan las entidades matemáticas (los números naturales, por ej.) «valiéndose de una representación material: a cada entidad de la construcción de $x$ le asocia, por ej., un punto que marcamos sobre un papel»[8].

---

[3] *Prolegomena*, §7.
[4] Poincaré, H.: *Ciencia y Método*, III. Trad. cast. Madrid, Espasa Calpe, 1944, p. 48.
[5] *Ibídem*, p. 42.
[6] *Introducción al intuicionismo*, trad. de V.Sánchez de Zavala, Madrid, Tecnos, 1976, p. 19.
[7] *Ibídem*, p. 20.
[8] *Ibídem*, p. 24.

Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

Y para Brouwer «la matemática es una actividad mental no lingüística, que tiene su origen en el fenómeno fundamental de la percepción de un fluir del tiempo. Fluir que es el rompimiento de un momento de vida en dos cosas distintas, una de las cuales cede el paso a la otra, pero es retenido por la memoria. Si la bi-unidad así originada viene despojada de todo contenido cualitativo, queda el sustrato común a toda la bi-unidad, la creación mental de la bi-unidad abstracta»[9].

De manera que para los intuicionistas la construcción matemática debe basarse exclusivamente sobre los números naturales y éstos, a su vez, sobre los conceptos de individuación singular y de repetibilidad. En primer lugar, el acto mental de aislamiento que constituye la realización de una bi-unidad. Tal aislamiento singular queda posibilitado por la intuición primaria del fluir del tiempo; intuición entendida en sentido kantiano: *a priori*; y, en segundo lugar, el acto mental de repetir un número finito de bi-unidades las cuales: (1) deben ser ordenadas con respecto al tiempo en que vienen realizadas; y (2) deben ser tales que sus tiempos de realización no se superpongan ni siquiera en parte.

Queda por examinar qué entienden exactamente los intuicionistas por «intuición»; concepto que queda mejor analizado (gnoseológicamente) en el planteamiento de la metodología intuicionista.

B) Teorías que ponen la Aritmética en el lado del objeto: sean los objetos empíricos (*empirismo*), sean los objetos ideales (*idealismo*).

El empirismo de Mill ha sido duramente criticado por Frege. Las verdades matemáticas son para Mill verdades experimentales: se basan en la observación y en la experiencia[10]; y las ecuaciones matemáticas pueden ser consideradas como definiciones; por ejemplo, la ecuación «3=2+1» puede ser considerada como la definición del número tres; pero tales definiciones dependen, en realidad, de hechos empíricos que son establecidos por experiencia e inducción. Esta «aritmética de tarta de nueces, o de guijarros» no obedece, según Frege, a un procedimiento racional, sino a un método que no puede ser más antimatemático: El empirismo de Mill concibe los números como configuraciones de objetos físicos que impresionan los sentidos con las imágenes de unas u otras descomposiciones de colecciones dadas; mas ¿qué objetos físicos están en la base del número cero?

Entre las teorías objetivistas empíricas más conocidas que sitúan la Aritmética en la esfera de la física están ciertas corrientes del «Círculo de Viena» que desarrollan el empirismo que aflora en el *Tractatus Logico-Philosophicus*, de Wittgenstein. Las proposiciones de la Lógica y de la Matemática se reparten en dos clases: las proposiciones fundamentales (atómicas) que no son más que registros de datos empíricos inmediatos, que son las que hacen el lenguaje «imagen del mundo»; y las proposiciones moleculares que, por el contrario, son

---

[9] Brouwer, L.E.: «Points and Space», *Canadian journal of mathematics*, 6 (1954), pp. 1-17; p. 2.

[10] Mill, J.S.: *A System of Logic*, Libro II, cap. 5, §4.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

funciones de verdad de las primeras y tienen como característica peculiar el ser falsables o verificables sobre la base de las leyes del pensamiento. El principio de verificación («el sentido de una proposición es el método de su verificación») formulado por Wittgenstein hacia 1929 y comunicado a Schlick y Waismann en 1930 fue aplicado por éste último a la filosofía matemática.

También Russell sigue el empirismo en algunas etapas del desarrollo de su pensamiento, especialmente en la primera etapa de su producción literaria; en su *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría* (1897), distingue dos clases de axiomas: (a) los que expresan (son aceptados como) las condiciones de la experiencia; y (b) los que son tomados de la experiencia, los cuales son leyes empíricas, obtenidas como las leyes empíricas de otras ciencias, a través del estudio positivo del objeto (§177).

Más fuerza han tenido las teorías objetivistas que, considerando la teoría platónica como paradigma, colocan la matemática en un campo constituido por ciertas entidades ideales. Los principios matemáticos, las verdades matemáticas, etc., constituyen entidades existentes en sí mismas, anteriores a, e independientes de, todo lenguaje y de todo hombre.

Modernamente cabe señalar como defensor de esta teoría a Leibniz con su doctrina de las verdades de razón (cuales son las de la Lógica y la Matemática), válidas en todos los mundos posibles. Seguidor de Leibniz es Bolzano, quien sostiene el aspecto objetivo (ideal) de la matemática. La Matemática, dice Bolzano, no es, como erróneamente suponía Kant, una ciencia de construcción de conceptos en correspondencia con intuiciones puras, sino que es una ciencia conceptual *a priori*, al igual que la Lógica y la Metafísica; es «la ciencia de las leyes (formas) universales a las que deben ajustarse las cosas en su modo de existencia»[11], en donde «leyes» significa las condiciones de posibilidad de las cosas.

Las dos obras fundamentales de Bolzano: la *Wissenschaftslehre* (1833) y las *Paradoxien der Unendlichen* (publicadas póstumamente, en 1851) constituyeron dos firmes bases del objetivismo ideal en Matemáticas. Las *Paradoxien der Unendlichen* constituyen el punto de partida para las investigaciones de Cantor sobre el infinito matemático y sobre los conjuntos. En la *Wissenschafstlehre* encuentran los fenomenólogos, Brentano, Meinong y Husserl varias tesis que configuran su teoría sobre la Matemática.

Husserl, siguiendo a Brentano, sostiene que todos los actos mentales son intencionales; los objetos intencionales son *ideales*, distintos de los objetos reales y esta esfera ideal es la propia de la lógica pura y la aritmética; éstas, «como ciencias de las individualidades ideales de ciertos géneros, o de lo que se funda *a priori* en la esencia ideal de estos géneros, sepáranse de la psicología, como ciencia de los ejemplares individuales de ciertas clases empíricas»[12], y

[11] *Wissenschaftslehre*, 1833.

[12] *Investigaciones Lógicas*, trad. de M.García Morente y J.Gaos, Madrid, Revista de Occidente, 1976, p. 154.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

«las leyes aritméticas, lo mismo las numéricas o aritmético-singulares que las algebraicas o aritmético-generales, se refieren a esas individualidades ideales (especies ínfimas en un sentido señalado, que es radicalmente distinto de las clases empíricas). No enuncian absolutamente nada sobre lo real, ni sobre lo que se cuenta, ni sobre los actos reales en que se cuenta... Tratan pura y simplemente de los números y de sus combinaciones, en su pureza e idealidad abstractas... Son leyes que se fundan puramente en la esencia ideal del género número. Las últimas individualidades, que caen bajo la esfera de estas leyes, son ideales»[13].

El más firme sostenedor del carácter objetivo-ideal de la lógica y de la aritmética es Frege, para quien los axiomas de la Lógica (y de la aritmética a ellos reducibles) emanan de ese mundo ideal e invisible, de un «tercer reino», que no es ni el de los objetos del mundo exterior, ni el de las representaciones subjetivas. No son hipótesis, sino principios verdaderos, necesarios, inmutables y únicos; hay juicios verdaderos independientemente del hecho de que los individuos humanos los efectúen o no. Esas proposiciones primitivas (los axiomas) no pueden por sí mismos probar su validez ni indicar su origen. Están ahí; y, cuando juzgamos, no podemos rechazarlos[14]. Y es posible acceder a los objetos de ese tercer reino, aunque, ciertamente, no a través de la sensibilidad: por eso rechaza Frege la tesis de Kant de que sin la sensibilidad no nos sería dado ningún objeto: el cero, el uno, son objetos que no nos pueden venir dados por los sentidos, sino que «son dados directamente a la razón, la cual los puede contemplar como lo más propio de sí mismo... No hay nada más objetivo que las leyes aritméticas»[15]. Así, por ejemplo, el teorema de Pitágoras es «intemporal»; o también: «que 3 cae bajo el concepto de número primo es una verdad objetiva; cuando la expreso no quiero decir que encuentro en mí una idea que llamo 'tres' y otra que llamo 'número primo', y que estas dos ideas se relacionan. Hablar así sería amputar el verdadero sentido de dicha frase... Lo mismo pasaría si, en lugar de decir: 'encuentro en mí estas ideas', dijese: 'construyo en mí estos conceptos', porque tampoco ahora daríamos cuenta más que de un proceso interior, en tanto que nuestra frase tiende a afirmar algo que fue y será siempre objetivamente válido, independientemente de nuestra vigilia y de nuestro sueño y con indiferencia con respecto al hecho de que haya habido o vaya a haber individuos para reconocer, o no, esta verdad»[16].

Las leyes de la aritmética versan, según Frege, sobre un conjunto de objetos que no son objetos físicos (bolas, guijarros), ni tampoco psíquicos (sentimientos, sensaciones), pero son, ciertamente, objetos: «los números son objetos comunes para muchos, y sin duda son exactamente los mismos para todos»[17].

---

[13] *Ibídem*, p. 150.

[14] *Grundgesetze*, I, p. xvii.

[15] *Fundamentos de la Aritmética*, trad. de U.Moulines, Barcelona, Laia, 1972, p. 124.

[16] «Über das Trägheisgesetz» (1890), en *Kleine Schriften*, Edic. I, Angelelli, G. Olms, Hildesheim, 1967, p. 122.

[17] *Fundamentos de la Aritmética*, p. 116.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

En *Introducción a la Filosofía Matemática* (1919). B. Russell se adhiere a estas tesis de Frege. Defiende la identidad entre Matemática y Lógica, y reta a quien opine lo contrario a que indique en qué punto de las sucesivas definiciones y deducciones de sus *Principia Mathematica* acaba la Lógica y empieza la Matemática. Es imposible, según Russell, trazar una línea entre las dos; las dos son, efectivamente, una sola cosa. Los contenidos de la Lógica y la Matemática no son cosas particulares ni propiedades particulares, sino que son las *formas*. Decimos que uno y uno son dos, pero no que Sócrates y Platón son dos. «Un mundo en el que no hubiera tales individuos continuaría siendo un mundo en el que uno y uno serían dos»[18]. Como para Leibniz las verdades «de razón», para Russell las verdades de la matemática son válidas en todos los mundos posibles; subsisten al margen de lo que ocurra en el mundo real («Hay proposiciones verdaderas y proposiciones falsas, como hay rosas blancas y rosas rojas»)[19]; pero, además, constituyen las leyes de los estados de cosas, de manera que la matemática, y en último término la Lógica a la que aquella se reduce, constituyen «el alfabeto del libro de la vida», la imagen del mundo, la cosmología.

C) Teorías que ponen la Aritmética en el lado del *lenguaje* sea entendido éste como descriptivo, sea entendido como convencional.

Como teoría lingüística más representativa en el primer sentido cabe citar la expuesta por Carnap en *Meaning and Necessity* (1947) en donde se junta la tradición del positivismo lógico y la tradición wittgensteiniana; allí el campo de la Matemática es el de los enunciados analíticos; y analítico equivale a verdadero, a *a priori*. El concepto de verdad empleado por Carnap («L-verdadero») es un concepto que se define respecto de un Lenguaje. Dado un sistema lingüístico en el que el vocabulario de predicados primitivos y constantes individuales permita ofrecer una especificación de los enunciados atómicos del sistema. Una clase de enunciados del sistema dado es denominada *descripción de un posible estado* en el sistema si contiene para cada enunciado atómico o bien ese enunciado o bien su negación, pero no ambos ni otros. Se ofrece además un conjunto de reglas que determinan si un enunciado es verdadero en una determinada descripción de estado. Y a partir de ahí se define la verdad así: Un enunciado es «L-verdadero» en el sistema si es verdadero para toda descripción de estado en el sistema.

También Carnap es el paladín del convencionalismo matemático y lógico. En su obra capital *Logische Syntax der Sprache* (1934) enuncia el llamado «principio de tolerancia», según el cual no existen unas leyes lógicas privilegiadas sobre otras, porque los sistemas lógicos son sistemas lingüísticos y todo lenguaje posee sus propias reglas sintácticas, y cada cual es libre de expresarse en el lenguaje que desee, con tal de especificar el ámbito y la sintaxis. Para defender su teoría Carnap sólo necesita reformular el aforismo de Wittgenstein:

---

[18] «Meinong's theory of complexes and assumptions», *Mind*, 13 (1904): p. 523.
[19] *Ibídem*.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

«1.1 El mundo es la totalidad de los hechos, no de las cosas», de este modo: «La ciencia es un sistema de proposiciones y no de nombres». En esta obra la Matemática es considerada como un conjunto de lenguajes, cada uno de los cuales amplía los precedentes, pero que no pueden quedar absorbidos todos en un único lenguaje cerrado.

Y Ayer, en la 1ª edic. de *Language, Truth and Logic* (1936) escribe: «Los principios de la lógica y de la matemática son universalmente verdaderos, sencillamente porque nunca les permitimos ser otra cosa. Y la razón de esto es que no podemos abandonarlos sin contradecirnos a nosotros mismos, sin faltar a las normas que rigen el uso del lenguaje»[20].

Pero quienes de manera más sistemática han desconectado la Lógica y la Matemática de los contenidos objetivos y de los subjetivos retrotrayéndolos al plano simbólico (formal) (al lado del lenguaje) han sido los formalistas (Hilbert, Bernays, von Neumann, Zermelo), tratando a la Matemática como una teoría axiomática formal, y demostrando que dicha teoría está exenta de contradicción. Este proyecto formalista recibe el nombre de «metamatemática» o «*Beweistheorie*» (Teoría de la prueba), desarrollada por Hilbert entre 1904 (*Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*) y 1918 (*Axiomatisches Denken*). En la axiomática formal todos los componentes subjetivos (las intuiciones, las evidencias) así como toda referencia a un orden de objetos o de significados exteriores al sistema han de quedar eliminados. El sistema lo es de símbolos de varios tipos y el sentido de los símbolos queda precisado por las condiciones de su empleo.

Como antecedentes del formalismo de Hilbert están Hankel (*Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867) y J. Thomae (*Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Varänderlichen* (1898). Para éste último la aritmética es un juego con signos que se dicen vacíos; no poseen otro contenido que el que les es asignado por su comportamiento respecto de las reglas de juego.

Esas reglas del juego son en el sistema de Hilbert los «axiomas». Los axiomas son para Hilbert «definiciones implícitas» y los términos que designan los elementos primitivos pueden ser considerados como variables libres. Así, en su axiomatización de la Geometría, dice Hilbert que pudo haber escrito «silla», «mesa» y «vaso» en lugar de «punto», «recta» y «plano». Precisamente en esa formalización reside, según él, el paso de la axiomática «intuitiva» a la axiomática «formal», de manera que a un sistema de fórmulas corresponde una pluralidad de interpretaciones, lo que significa admitir la posibilidad de que los signos que figuran en esas fórmulas o los signos en general tengan múltiples denotaciones y múltiples sentidos (multivocidad=*Vieldentigkeit*) de los signos. En la axiomática formal los objetos de la teoría estudiada y las relaciones que entre ellos se establecen son expresados por símbolos desprovistos de toda significación. Reciben, solamente de una forma *implícita*, su determinación a través de los axiomas, de modo que «en todas sus consideraciones la axiomática

[20] Trad. de M.Suárez, Barcelona, Martínez Roca, 1971, p. 88.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

formal no utiliza más relaciones primitivas que las formuladas expresamente por los axiomas»[21].

El método axiomático, nacido con Euclides y perfeccionado por Hilbert, se convierte en dogma para el bourbakismo. «El método axiomático —dice Bourbaki[22]— aplicado a entes matemáticos complejos, permite disociar de ellos sus propiedades y agruparlos en torno a un pequeño número de nociones, esto es, clasificarlos siguiendo las *estructuras* a las que pertenecen (bien entendido que una misma estructura puede intervenir a propósito de entes matemáticos diversos)». En este sentido, una vez establecido el concepto de «estructura» a través del de «sistema formal axiomático», las Matemáticas quedarán clasificadas de acuerdo con los diversos tipos de estructuras.

### *I.3. Análisis gnoseológico de la Aritmética*

Hasta aquí hemos examinado las diversas teorías sobre la Matemática en general, y más en concreto sobre la Aritmética, que podríamos denominar «teorías reduccionistas», por cuanto que reducen los contenidos del campo de dicha ciencia a uno de los tres componentes que, como hemos visto, intervienen necesariamente en la configuración de toda ciencia.

La teoría del cierre categorial pretende escapar al reduccionismo, integrando los tres componentes necesarios a toda ciencia, analizados gnoseológicamente, estableciendo tres ejes de coordenadas (partiendo de las tres dimensiones del lenguaje, conjunción Bühler-Morris): ejes sintáctico, semántico y pragmático, juntamente con sus dimensiones.

Dado que los elementos intervinientes son: sujetos (S), objetos (O) y signos ($\Sigma$), y supuesto que cada elemento interviniente tiene lugar por la mediación de los otros, tendremos:

I. Eje *sintáctico*, dividido en tres secciones: (1) *Términos* dado por la mediación de O en las relaciones ($\Sigma$, $\Sigma$ ); (2) *Relaciones* de (S, S) a través de O, y de (O, O) a través de S; y (3) *Operaciones* los pares ($\Sigma$, S) y (S, $\Sigma$), en cuanto mediadores de las relaciones ($\Sigma$, $\Sigma$) nos ponen en presencia de la propia actividad de los sujetos, en tanto que componen unos signos con otros. Los contenidos de una ciencia, considerados en su perspectiva sintáctica caerán en una de estas tres figuras gnoseológicas del eje sintáctico: términos, relaciones y operaciones.

II. Eje *semántico*, comprende: (1) la sección asociada al par ($\Sigma$, O) en tanto que los signos se resuelven en los objetos: sección *Fisicalista*; (2) la sección asociada al par (O, $\Sigma$) en tanto que consideramos al objeto (O) tal como aparece significado por : sección *Fenomenológica*; y (3) la sección asociada al par (O, O) en tanto que está presupuesto en las relaciones formalmente semánticas: sección *ontológica*.

---

[21] Hilbert y Bernays: *Grundlagen der Mathematik*, I, §1, p. 7.

[22] *Elements de Mathématique*, Libro I: Théorie des ensembles, Introducción.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

Referenciales, fenómenos y esencias son las figuras gnoseológicas del eje semántico.

III. Eje *pragmático*: (1) La sección asociada a los pares (Σ, S) en cuanto conjunto de signos que se resuelven en los sujetos individuales S: sección *Autológica*; (2) la sección asociada a los pares (S, Σ) interpretados como emblemas de actividades de cada sujeto S que se resuelve en signos Σ, y que, por lo tanto, remiten a otros sujetos diferentes del dado: sección *Dialógica*; y (3) la sección asociada a los pares (S,S) en cuanto componentes materiales de las relaciones pragmáticas y que presiden las relaciones autológicas y dialógicas: sección *Normas*.

Autologismos, dialogismos y normas son las figuras del eje pragmático.

Estos tres ejes de coordenadas gnoseológicas constituyen un método de análisis de las diversas ciencias, mediante el cual cabe señalar las partes formales y la masa de conceptos de una ciencia. En nuestro caso para analizar los conceptos y las partes formales (los contenidos del campo) de la Matemática.

La Matemática, junto con la Lógica, constituyen las llamadas «ciencias formales» en oposición a las «ciencias naturales» y a las «ciencias humanas». Aunque sólo sea etimológicamente las ciencias «formales» pueden ir asociadas (y de hecho se ha propuesto tal asociación) al esquema de la oposición forma-materia. Según esta oposición (por lo demás gnoseológicamente ambigua), la sede de la verdad de estas ciencias está en la forma (verdad formal o validez, en sentido de Carnap) frente a la *materia*, sede de la verdad material. Según esto, la construción de las ciencias formales se mantendría dentro del eje sintáctico, prescindiendo del eje semántico. Mas, según nuestro análisis gnoseológico, las «ciencias formales», como toda ciencia, exigen que su construcción sea con términos *físicos* y con operaciones sobre esos términos físicos, de manera que necesariamente han de incluir en su construcción la sección *fisicalista* del eje semántico. Ello significa que no cabe hablar de la Lógica o de la Matemática puramente formales, y por lo tanto hace una crítica (coincidente en parte con la de Frege) al formalismo de Hilbert que propugna la teoría de las «fórmulas vacías», destituidas de todo contenido y significativas únicamente en virtud de las relaciones que entre ellas median dentro del sistema axiomático. Sólo es admisible el formalismo en su momento negativo, en la «desconexión semántica» respecto de todo contenido exterior a los símbolos. Pero, como Frege señala, los signos no pueden quedar desprovistos de todo «sentido» y «referencia», so pena de que no sepamos de qué estamos hablando. (En esta hipótesis quedaría justificada la afirmación de Russell: «En Matemáticas no se sabe de qué se habla ni si lo que se dice es verdad»). El formalismo ha de ser entendido, pues, no como la evacuación de toda interpretación o contenido, sino como la evacuación de toda interpretación que no esté contenida en el ejercicio de sus significantes. «El materialismo formalista —dice Bueno[23]— reconoce a los

[23] Bueno, G.: «Operaciones autoformantes y heteroformantes. Ensayo de un criterio de demarcación gnoseológico entre Lógica formal y Matemática, I», *El Basilisco*, 7 (1980): p. 29.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

símbolos un contenido material, a saber, la propia entidad de sus *significantes* y toda la estructura geométrica (ordenaciones, permutaciones a derecha e izquierda, etc.) que en su propia realidad de significantes ha de ir implicado». Y ello porque los signos de las fórmulas matemáticas o lógicas son *autogóricos*.

Llama así Bueno a los signos que son, a la vez, *autónimos* y *tautogóricos*. Un signo es denominado *autónimo*, si su significado es «causa» del significante *qua tale*, de manera que resulte un significante semejante (y precisamente según un contenido material de semejanza recortado en el proceso mismo) al significado. El significante resultará ser, así, parte lógica del significado, como en los símbolos autorreferentes («palabra» es una palabra, «predicable» es predicable).

Un signo es denominado *tautogórico*, si el significante es causa (con-causa) del significado, sin que por ello éste deba ser semejante a aquél, siendo la situación límite el *signum sui*, en donde el significante nos remite *ordine essendi* al significado. Por ejemplo, los signos mágicos o religiosos («*ego te absolvo*»; «*ego te baptizo*», etc.); los «actos perlocucionarios» de Austin: («fuera»).

Cuando el signo es, a la vez autónimo y tautogórico es denominado *autogórico*. «La flecha del tiempo —dice Bueno[24]— podría valer como ejemplo de signo autogórico, si suponemos que ella significa el tiempo en virtud del mismo movimiento (=tiempo) significado que le conforma como significante, ... en virtud del movimiento de la mano de quien la traza o acaso del movimiento del ojo de quien, recorriéndola precisamente en un sentido, la percibe».

Los signos de la Matemática y de la Lógica serían, según esto, autogóricos. En su propia *suppositio materialis* van incluidas las estructuras matemáticas, lógicas, que pueden darse ordinariamente al margen de los significantes, pero que son ya sus significados. Estos signos, lejos de haber eliminado su referencia semántica la tienen incorporada en su misma entidad de signos (de significantes en cuanto coordinables con otros).

En la igualdad algebraica:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

las letras no son variables libres (susceptibles de figurar como emblemas de entidades tipográficas), sino que figuran como indeterminadas, cuya determinación (significado) está contenida (le viene dada) en su propia entidad de signos: $a^2$ queda determinado al contar las menciones de $a$, en cuanto que $a$ es un ente real, un elemento de las clase de las figuras del mismo signo patrón, y no un signo formal, cuya función se agota en representar otro distinto de sí. La función de $a^2$, al margen de su valor como esquema o modelo respecto de otros contenidos materiales (monedas, aceleraciones, etc.), viene determinada por las operaciones a las que queda sometida el álgebra de los propios significantes algebraicos, por cuanto que el sistema de símbolos algebraicos reproduce él

[24] *Ibídem*, p. 25.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

mismo la estructura autológica de otros sistemas fisicalistas y, en particular, el enclasamiento de todos los símbolos.

Lo que se niega, pues, es la consideración de la Matemática o de la Lógica Formales como la Teoría General de las estructuras (matemáticas, lógicas) en cuanto puramente formales o generales aplicables a cualquier materia, tal como las entiende Bourbaki cuando dice[25]: «Poco importa, en efecto, cuando se trata de escribir o de leer un texto formalizado, que se asigne a las palabras o signos de ese texto tal o cual significación, o también, que no se le asigne ninguna; sólo importa la observación correcta de la sintaxis». En este sentido se le atribuye a la Matemática Pura una universalidad genérica de las estructuras, común a las diversas realizaciones en los ámbitos categoriales. «Formal» o «abstracto» significa «genérico», «universal», como trama *a priori* del Mundo: «Lo mismo que el arte de hablar correctamente una lengua preexiste a la gramática, así también el método axiomático ha sido practicado antes de la invención de los lenguajes formalizados»[26].

Desde el Materialismo formalista, por el contrario, la Matemática Pura no sería tanto la «Matemática universal» que «refleja» las diversas estructuras físicas, categoriales, cuanto una matemática particular: la construcción de un campo cerrado en un espacio de dos dimensiones sometido a unas estructuras geométricas (ordenaciones, leyes de posición, etc.) y físicas (temperatura, color, etc.). Este campo lleva en sí su propia matemática interna particular y eventualmente —precisamente por la artificiosidad de sus figuras (símbolos), en cuanto que han sido construidas y reconstruidas íntegramente por un sujeto operatorio— puede ser utilizado como metro para analizar otro tipo de relaciones soportadas por otro tipo de materialidades (números, guijarros, individuos, etc.) De modo que la conexión entre Matemática (o Lógica) universal, pura, formal, y las matemáticas (lógicas) particulares no es una conexión de tipo género (todo) a especie (parte), sino, más bien, de especie (parte) a especie (parte).

El formalismo de Hilbert y Bourbaki se apoya en un esquema de conexión metafísico del dualismo clásico *forma/materia*. Metafísico por cuanto que supone una sustantivación de los términos componentes: se supone la materia como dada sin forma alguna (materia prima) o la forma como existiendo sin materia (formas separadas), y se formulan diversos esquemas de conexión *metamérica*[27] entre los términos.

Pero cabe también ensayar entre los términos del par *forma/materia* un esquema de conexión *diamérica*[28]. En virtud de este esquema, cada término del par no es tomado de modo global, sino en partes homogéneas. Preparado uno de los términos en partes extra partes, el otro término constituye la relación entre las partes del primero. En nuestro caso, partimos de la pluralidad de

---

[25] *Elements de Mathématique*, libr. I, p. 3.

[26] *Ibídem.*

[27] *Confert* Bueno, G.: «Conceptos Conjugados», *El Basilisco*, 1 (1978), pp. 88-92.

[28] *Ibídem.*

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

contenidos materiales que se relacionan entre sí de diferentes maneras. Supuesta una materia M, como conjunto de partes: *m*, *n*, *r*,..., con una disposición N y otra disposición N', la transformación F de N en N' es una permutación de los términos de M. «F —dice Bueno[29]— puede ser un molde —en el sentido en el que se dice que una cadena de helicoide de ADN, una vez desdoblada, es un molde para las unidades precursoras que flotan en la célula—, puede ser un negativo fotográfico. F determina como causa formal (no eficiente) la disposición N'. No genera los propios términos *m*, *n*, *r*, que se suponen dados. N' los 'reorganiza'... Lo que hemos conseguido con esto es, simplemente, eliminar el dualismo sustancial entre las Formas y la Materia: la forma es la misma materia cuando se relaciona con otras de un cierto modo».

Este esquema de conexión diamérica permite recuperar el hilemorfismo despojado de sus adherencias metafísicas que comporta siempre que se entienda la materia como pudiendo darse sin forma alguna, o la forma como pudiendo existir sin la materia (formalismo de Hilbert o Bourbaki). El carácter negativo (metafísico) del formalismo bourbakista reside en la hipóstasis de las formas matemáticas, de los lenguajes formalizados y axiomatizados. Y lo que se niega es que haya sistemas *formales* abstractos, desvinculados de todo contenido o *materia*. Las fórmulas algebraicas no son fórmulas vacías, ya que, si bien son independientes de todo contenido exterior a sus símbolos, llevan su referencia y su significado en su misma materialidad tipográfica, sujeta a manipulaciones (operaciones) y relaciones precisas. En consecuencia, desde la perspectiva de la teoría del «cierre categorial», la Matemática se nos presentará, no tanto como el tratado sobre las estructuras «abstractas» o «formales», cuanto como un sistema particular de significantes tipográficos, como una construcción con *términos* físicos (los propios símbolos matemáticos), entre cuyos términos median *relaciones* materiales (de semejanza, de distancia, de posición) y *operaciones* características dadas dentro de configuraciones o *contextos determinantes*.

La construcción cientffica se diferencia de otras construcciones (ideológicas, mitológicas) porque obedece a *principios internos* al propio campo material categorial de la ciencia en cuestión. Y esos principios internos, gnoseológicos, no son otra cosa que el desarrollo de los términos del campo, en tanto que estos términos aparecen en ciertas configuraciones —contextos determinantes— que resultan más o menos fértiles para la reconstrucción de los términos del campo —contextos determinados—, para la construcción de esquemas de identidad (verdades internas).

Según esto, determinadas «leyes» o «teoremas» serán principios internos a la Matemática, cuando resultan necesarias para la subsistencia del propio campo de términos matemáticos; y no sólo necesarios, sino que constituyen contextos determinantes fértiles. Examinemos algunos ejemplos.

La «ley de dualidad», $x^2 = x$, es considerada por Boole como la ley fundamental de su álgebra. Prescindiendo de las connotaciones psicologistas de

[29] *Ensayos Materialistas*, Madrid, Taurus, 1972, p. 342.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

la exposición de Boole, podemos, sin embargo, seguir manteniendo su carácter fundamental desde un punto de vista gnoseológico, a saber, en la medida en que resulta un contexto determinante fértil para la reconstrucción del campo categorial del álgebra booleana. La ley sirve para «cerrar» un campo de términos, y de ahí su potencia. A partir de ella es posible llegar a otras leyes o principios (identidades), por ejemplo: al «principio de no-contradicción»:

$$x^2 = x$$
$$x - x^2 = 0$$
$$x\,(1 - x) = 0$$

Así mismo, la eliminación de elementos que no se atienen a dicha ley reorganiza el campo, dando lugar a nuevos principios.

Boole mismo llama la atención[30] hacia la circunstancia de que la ecuación en la que se expresa esta ley fundamental es una ecuación de segundo grado. Podría pensarse, pues —sigue diciendo— que la existencia de la ecuación $x^2 = x$ exige la existencia de la ecuación de tercer grado $x^3 = x$. De hecho Boole había admitido esta ley:

$$x = x^2 = x^3 = \ldots = x^n$$

que denominó «ley del índice», y que le permitía obtener su función (función booleana) a partir del teorema de McLaurin para el desarrollo de una función polinómica f(x):

$$f(x) = f(0) + (f'(0)/1!)x + (f''(0)/2!)x^2 + (f'''(0)/3!)x^3 + \ldots + (f^n(0)/n!)x^n + \\ + Tn(x)$$

en donde Tn(x) recibe el nombre de término complementario, y los coeficientes vienen dados a través de las derivadas sucesivas de f(x): f', f'', f'''.

A partir de esta fórmula procede Boole para obtener su función como sigue: puesto que los valores que las variables booleanas (símbolos electivos) pueden tomar son *1* y *0*, y supuesta la ley $x = x^2 = x^3 = \ldots = x^n$, la fórmula de McLaurin puede ser reescrita así:

$$(1)\ f(x) = f(0) + (f'(0)/1! + f''(0)/2! + f'''(0)/3! + \ldots + f^n(0)/n! + Tn)x$$
$$(2)\ f(1) = f(0) + f'(0)/1! + f''(0)/2! + f'''(0)/3! + \ldots + f^n(0)/n! + Tn$$
$$(3)\ f(1) - f(0) = f'(0)/1!\ f''(0)/2! + f'''(0)/3! + \ldots + f^n(0)/n! + Tn$$

Sustituyendo ahora en (1) todo el paréntesis por su equivalente (segundo miembro de la igualdad (3)), obtenemos:

$$f(x) = f(0) + (f(1) - f(0))x$$
$$= f(1)x + f(0) - f(0)x$$
$$= f(1)x + f(0)(1 - x)$$

[30] *An investigation of the laws of thought*, reimpr., Nueva York, Dover, 1951, pp. 50-1.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

Como hemos visto, este desarrollo es válido sólo si se admite en el desarrollo numérico de McLaurin la ley $x = x^2 = x^3 = ... = x^n$. Pero restringiéndonos ahora al campo categorial del álgebra booleana, hay diferencias entre $x^2 = x$ y $x^3 = x$. Boole explica esas diferencias aduciendo razones psicologistas, como que nuestro entendimiento opera por dicotomías y no por tricotomías, de modo que la ley fundamental (porque así es la ley de nuestro pensamiento) es la expresada mediante la ecuación $x^2 = x$. Pero Boole mismo ofrece otras razones que consideramos gnoseológicamente pertinentes. Las ecuaciones $x^2 = x$ y $x^3 = x$ sólo son equiparables en un plano abstracto, algebraico. Pero internamente, situados en el campo categorial del álgebra de clases, esas leyes son de «naturaleza distinta». La ecuación $x^3 = x$ no constituye, como $x^2 = x$, un contexto determinante fértil en el sentido de organizar los términos del campo; antes bien, conlleva elementos ajenos a, «no interpretables» en, el campo. Al escribir $x^3 = x$ en cualquiera de las formas

$$(1)\ x(1 - x)\ (1 + x) = 0$$

$$(2)\ x(1 - x)\ (-1 - x) = 0$$

nos encontramos con que tanto en (1) como en (2) aparecen elementos no interpretables en el álgebra de Boole (no sujetos a la ley $x(1 - x) = 0$, a la que se ajustan todos los elementos del álgebra de clases). Estos elementos son: $(1 + x)$ y $(-1)$. Resulta, en efecto, que:

(1) $(-1)^2 \neq -1$, es decir que $1 + 1 \neq 0$
(2) Si $(1 + x)^2 = 1 + x$
y $x^2 = x$
entonces $1 + x + x + x = 1 + x$
de donde $x + x = 0$

válido sólo si $x = 0$. Pero en ese caso se contraviene la interpretación que Boole da a la operación +, a la que exige que se establezca entre clases mutuamente excluyentes con lo que queda eliminada la ecuación $x + x = x$.

Los principios gnoseológicos aparecen, así, como principios materiales en su aspecto constructivista. Brotando del desarrollo de los términos, reorganizan internamente el campo categorial. No son meras tautologías.

La consideración de las leyes lógicas o matemáticas como tautologías parte de Wittgenstein y, reformulada, la han hecho suya algunos de los principales representantes del círculo de Viena y sus seguidores filósofos analíticos (y también Russell, en la 2ª edición de los *Principia*). Wittgenstein, habiendo definido el sentido de una proposición como su valor de verdad, una tautología será desprovista de sentido al ser incondicionalmente verdadera y no refiriéndose a ningún estado de cosas real; y llega a sostener no sólo que los teoremas lógicos son tautologías, sino que es precisamente su naturaleza tautológica, es decir, enunciados que no tienen necesidad de ser comparados con los hechos, lo que explica que las tautologías sean deducibles. Todo teorema lógico es, pues, una tautología; y recíprocamente; y puesto que los teoremas matemáticos

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

son teoremas lógicos, se sigue que las Matemáticas «son una gigantesca tautología».

Esta noción wittgensteniana de «tautología» se acopla perfectamente a la teoría del positivismo lógico, según la cual todo conocimiento no analítico se basa en la experiencia. De una proposición se puede decir que es o bien verdadera o bien falsa, sólo si es (1) analítica o bien (2) capaz, al menos en principio, de comprobación experimental. Y en este esquema las verdades lógicas y matemáticas son tautologías, lo que equivale a decir que son analíticas, necesarias y *a priori*.

«Las verdades de la Lógica y de la matemática son proposiciones analíticas o tautologías» dice Ayer[31]; y más adelante contradice a Kant por suponer que todas las proposiciones *a priori* necesarias son sintéticas; por el contrario: «son, sin excepción, proposiciones analíticas o, en otras palabras, tautologías», como por ejemplo la proposición «7 + 5 = 12»; su verdad reside, según Ayer, en el hecho de que la expresión simbólica «7 + 5» es sinónima de «12», de igual modo que la verdad de la proposición «todo oculista es un doctor en ojos» depende del hecho de que el símbolo «doctor en ojos» sea sinónimo de «oculista»[32].

Nos oponemos a esta caracterización de las verdades matemáticas. La observación empírica del uso lingüístico podrá establecer, a lo sumo, que ciertas expresiones en un determinado lenguaje son sinónimas o parcialmente sinónimas, por ej., que en castellano «doctor en ojos» es sinónimo de «oculista». Pero la sinonimia de «doctor en ojos» y «oculista» no es garantía de la necesidad de la proposición «todo oculista es doctor en ojos». Y más grosero aún nos parece fundamentar la necesidad (y la verdad) de las ecuaciones matemáticas en el concepto de sinonimia o de analiticidad en el sentido expresado. Primero, porque, como indicamos al comienzo, los términos de un campo categorial no son entidades primitivas, atómicas, aisladamente, sino en la medida en que se combinan con otros formando configuraciones. Así, por ejemplo, el concepto de «factorial», introducido por Arbogast, constituye una función aplicable en coordinatoria a elementos (número de objetos) teniendo en cuenta el *orden*. Las coordinaciones resultantes de hacer que cada uno de los elementos considerados ocupe sucesivamente todos los lugares posibles se llaman *permutaciones*, y se expresa por n!, siendo:

$$n! = n(n - 1)\ (n - 2)... (n - n + 1)$$

o bien

$$n! = 1\ 2\ 3... n$$

Según esta caracterización de factorial ¿qué concepto puede haber más absurdo que 0!, donde no hay elementos ni pueden, por tanto, ocupar posibles lugares? Aún se entiende (intuitivamente) 1! que por ser elemento único sólo podrá

[31] *Lenguaje, verdad y lógica*, ed. cast., p. 88.
[32] *Ibídem*, p. 97.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

ocupar un lugar: 1! = 1. Pero ¿cómo entender que 0! = 1? ¿Como una proposición *analítica* en el sentido de que el concepto «0!» es sinónimo del concepto «1» o del concepto «1!», ya que

$$0! = 1! = 1\ ?$$

De ningún modo. Nuestra explicación es que 0! no es un término primitivo (como tampoco lo es la clase vacía $\{\varnothing\}$ ó $3^0$), sino que lo es en tanto que resulta en el proceso operatorio de otros términos y que, una vez «segregado», puede soportar (como término primitivo) relaciones y operaciones con otros términos de su misma clase. Así, diríamos que 0! carece de significado, pero de las fórmulas (de las configuraciones):

$$m! = (m - 1)!m$$

y por tanto:

$$(m - 1)! = m!/m$$

y siendo m = 1, tenemos:

$$(1 - 1)! = 1!/1 =$$
$$0! = 1$$

Esta última ecuación no constituye una proposición (o identidad) *analítica*, sino una identidad *sintética* en el sentido de que no se trata de una relación simple, sino de una relación resultado de un proceso operatorio: cuando sus términos quedan inmersos en otras configuraciones y son resultados de otras operaciones, y confluyen en esa igualdad a través de varios procesos operatorios; la igualdad resultante, entonces, constituye el nexo —el contexto determinante— que preside todo el proceso operatorio.

Y, finalmente, el principio de inducción matemática es el paradigma del proceso de construcción de las verdades matemáticas entendidas como identidades sintéticas, como resultado de la confluencia de varios procesos operatorios. Por eso consideramos (y aquí nos ponemos de parte de Poincaré frente a los logicistas) que dicho principio no puede ser considerado como analítico, ni siquiera en el sentido que Frege da al término «analítico», en cuanto asociado a la deducción: para él una proposición es analítica si se deduce de los principios lógicos y de las definiciones. Y por ello intenta Frege en los *Fundamentos de la Aritmética* reformular el principio de inducción matemática en términos lógicos. Y también sabemos que dicha reformulación resultó ser una definición «impredicativa» (con las dificultades que ello puede conllevar de cara a las paradojas: las paradojas envuelven siempre definiciones impredicativas).

La demostración por recurrencia no es ni inductiva ni deductiva en el sentido tradicional (aritotélico) de estos términos. Por cuanto que se trata aquí de todos y partes, no distributivos (propios de las extensiones lógicas), sino atributivos. No se trata de extender una propiedad P *distributiva* («ser par» o «ser pequeño», p. ej.) observada en algunos casos a todos los números (inducción

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992

baconiana), sino demostrar o construir una igualdad (identidad sintética) que considerada como propiedad es *atributiva*, por cuanto que corresponde a cada elemento en cuanto que éstos vienen dados en una serie (en relaciones sintagmáticas, en orden) y por eso el primer paso de la parte al todo comienza con el primero de la serie. La propiedad que se demuestra (o construye) es una igualdad (identidad sintética) en cuanto resultancia de procesos operatorios diferentes entre términos particulares y un término general. Por ej., sea la propiedad (la igualdad): «la suma de los *n* primeros números impares es el cuadrado de *n*». La demostración (o construcción) tiene lugar a través de procesos operatorios diferentes:

(I) Uno horizontal, mediante el que, comenzando por el primero de la serie, operamos por «contigüidad», según relaciones asimétricas (de orden) «sintagmáticas», sobre términos «particulares».

(II) Otro vertical, mediante el cual operamos por «semejanza», según relaciones «paradigmáticas» y con un término general.

Y de la confluencia de ambos procesos operatorios obtenemos la propiedad (la identidad sintética). Así:

$$
\begin{array}{ll}
1 & \rightarrow = 1^2 \\
1+3 & \rightarrow = 2^2 \\
1+3+5 & \rightarrow = 32 \\
1+3+5+...+(2n-1) & \rightarrow = n^2 \\
 & \quad \downarrow \\
1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1) & \rightarrow n^2+(2n+1)\backslash(n+1)^2
\end{array}
$$

El paso de *n* a *n+1* no se hace por inducción empírica, sino por construcción a partir de la nueva configuración (la ley de potencias de un binomio: identidad sintética) resutado de, y que al mismo tiempo preside:

1) el proceso operatorio vertical, en virtud del cual vamos obteniendo sucesivamente los cuadrados de los números naturales: $1^2$, $2^2$, $3^2$, ..., $n^2$, $(n+1)^2$.

2) el proceso operatorio horizontal, en virtud del cual a la suma anterior = $n^2$ añadimos el siguiente número impar: $n^2 + (2n+1)$.

En consecuencia, las verdades matemáticas entendidas como identidades sintéticas constituyen, no una relación (de identidad o de igualdad) simple, sino un complejo de relaciones y operaciones que aplicadas a términos pertenecientes a diversas clases anudan a éstos en una configuración en un contexto determinante, fértil para reconstruir todos (o buena parte) de los términos del campo categorial considerado.

φñ Revista Meta, Congreso sobre la filosofía de Gustavo Bueno (enero 1989), Editorial Complutense 1992