RESPUESTAS AL PROBLEMA PROPUESTO EN EL Nº 7 DE «*EL BASILISCO*»

FRANCISCO RODRIGO MATA
Avila

INTRODUCCION.-

El cálculo deductivo-natural que he utilizado para la solución, creo que es correcto en lo fundamental aunque no me he tomado la molestia o el tiempo necesario para formalizar rigurosamente el lenguaje del cálculo ni las reglas de transformación. Indudablemente demostrar estas reglas a partir de otras más básicas sería un trabajo de mayor entidad y rebasa la pretensión simple de descubrir las reglas que operan en la solución del problema. Es muy posible que algunas de éstas, a pesar de mostrar su validez concreta en la derivación que aquí se hace, resultasen en una investigación más detenida inválidas como tales reglas generales del razonamiento lógico-matemático (aunque obviamente he procurado que ésto no sea asi).

En general, el procedimiento de solución se basa en estudio de alternativas, para considerar probados los supuestos que nos lleven deductivamente a coincidir con las premisas; sin duda sería mucho más breve la demostración basarla en una regla de Absurdo (suponer lo contrario de la solución correcta y llegar con ello a una contradicción): la solución se capta con facilidad de modo intuitivo, pero es indudablemente más difícil sistematizar los mecanismos lógicos de esta intuición; lo primero que se averigua es que el número de pájaros de 5 céntimos ha de ser 20, 40, 60 u 80; ésto hay que demostrarlo en el cálculo; inmediatamente después, se tiende a suponer que el número más elevado de pájaros será el de los que cuestan cinco céntimos, y es casi seguro que quien tuviera que calcular mentalmente el problema comenzaría analizando el caso de que éstos fueran 80; pero resolver el problema, no significa sólo demostrar que una determinada solución es correcta, sino rastrear todas las posibles, y no significa tanto encontrar una solución cuanto demostrarla o, por mejor decir, derivarla.

Finalmente he de advertir que el sentido de las reglas se explica muy brevemente y que he creído preferible (en orden a la claridad, aunque en detrimento del rigor) omitir variantes múltiples de las reglas, dando por supuestas, entre otras, las leyes de conmutatividad y asociatividad de la unión de clases.

I.- SIMBOLOS PRIMITIVOS.-

— "p" es un enunciado.
— "A", "B", "C", son clases.
— "C_A", "C_B", "C_C" son clases.
— "P_A", "P_B", "P_C" son clases.
— "x", "y", "z", "u", "v", "t", "s", son variables individuales que indican números naturales enteros.
— "$\emptyset$" es el cardinal de una clase vacía.

II.- REGLAS DE FORMACION DE FORMULAS.-

— Si "x" e "y" son números, "x+y", "x-y", "x.y", "x:y", "$\overset{*}{x}$", "$\overset{*}{y}$", son números.
— Si "x" e "y" son números, "x=y", "x≠y", "x<y", "x>y", son proposiciones numéricas.
— Si "A" es una clase y "x" es un número, "A=x" es una matriz proposicional donde "x" indica el cardinal de "A".
— Si "A" es una clase y "x" es un número, "A<x" y "A>x" son matrices proposicionales, donde "x" indica un cardinal mayor y menor respectivamente que el cardinal de "A".
— Si "p" es una proposición, "A" una clase, y "x" un número, "p(A=x)", "p(A≠x)", p(A<x)" y "p(A>x)", son proposiciones numéricas.
— Si "p" es una proposición, "$\neg$p", "p$\wedge$p" y "p$\vee$p" son proposiciones moleculares.
— Si "A" es una clase (nombre de clase) y "B" es una clase "A ∪ B" es la clase unión de "A" y "B"

III.- REGLAS DE TRANSFORMACION.-

Lenguaje en que están formuladas.-

— "V" es una variable proposicional metalingüística.
— "α", "β", "γ", son nombres metalingüísticos de clases.
— "K_α", "K_β", "K_γ", son nombres metalingüísticos de clases de clases.
— "$\prod_\alpha$", "$\prod_\beta$", "$\prod_\gamma$", son nombres metalingüísticos de clases (producto del cardinal de "K_α" y del cardinal de "α", etc.).
— "ν", "μ", "π", "ρ", "ς", "τ", "ψ", etc. son números.

Estos simbolos primitivos se componen para formar fórmulas según las mismas reglas indicadas en el apartado II.

REGLA 1.- REGLA DE SUMAR (R.S.).

R.S.1.-
$$\frac{V(\alpha=\nu) \qquad V(\beta=\mu)}{V(\alpha\cup\beta=\nu+\mu)}$$

R.S.2.-
$$\frac{V(\alpha=\nu)\wedge V(\beta=\mu)}{V(\alpha\cup\beta=\mu+\nu)}$$

REGLAS AUXILIARES: TABLA DE SUMAR.

REGLA 2.- REGLA DE RESTAR.- (R.R.)

R.R.1.-
$V(\alpha \cup \beta = \nu)$
$V(\alpha = \mu)$
———
$V(\beta = \mu - \nu)$

R.R.2.-
$V(\alpha \cup \beta \cup \gamma = \nu)$
$V(\alpha = \mu) \vee V(\alpha = \mu + \rho)$
$V(\gamma \neq \emptyset)$
———
$V(\beta < \nu - \mu - 1)$

REGLA AUXILIAR: TABLA DE RESTAR

REGLA 3.- REGLA DE PRECIO (R.Pr.)

$V(K_\alpha = \nu)$
$V(\alpha = \mu)$
———
$V(\prod_\alpha = \mu \cdot \nu)$

REGLA AUXILIAR: TABLA DE MULTIPLICAR.

REGLA 4.- REGLA DE DIVIDIR.- (R.D.)

$V(\prod_\alpha = \nu)$
$V(\alpha = \mu)$
———
$V(K_\alpha = \nu : \mu)$

REGLA AUXILIAR: TABLA DE DIVIDIR.

REGLA 5.- REGLA DE MULTIPL (R.MPLO.)

R.MPLO. 1.- $V(\alpha = \dot{\nu})$
———
$V(\alpha = \nu) \vee V(\alpha = 2\nu) \vee V(\alpha = 3\nu) \vee \ldots \vee V(\alpha = \mu \cdot \nu)$

R.MPLO.2.-
$V(\alpha \cup \beta = \dot{\nu})$
$V(\alpha = \dot{\nu})$
———
$V(\beta = \dot{\nu})$

R.MPLO. 3.-
$V(\alpha = \dot{\nu})$
$V(\beta = \dot{\nu})$
———
$V(\alpha \cup \beta = \dot{\nu})$

R.MPLO.4.-
$V(\alpha = \dot{\nu})$
———
$V(\prod\alpha = \dot{\nu})$

REGLA AUXILIAR: TABLA DE MULTIPLICAR (sólo en R.MPLO. 1).

REGLA 6.- REGLAS DE CONJUNTO VACIO.- R.C.V.

R.C.V.1.-
$V(\alpha \cup \beta = \nu)$
$V(\beta \neq \emptyset)$
———
$V(\alpha < \nu)$

R.C.V.2.-
$V(\alpha \neq \emptyset) \wedge V(\beta \neq \emptyset)$
———
$V(\alpha \cup \beta \neq \emptyset)$

R.C.V.3.-
$V(K_\alpha \neq \emptyset)$
———
$V(\prod_\alpha \neq \emptyset)$

REGLA 7.- REGLA DE SERIE NUMERICA.- R.S.N.

Lm	$V(\alpha = \nu)$
Lm+n	$V(\beta = \mu)$
Lm+ñ	$V(\gamma = \dot{\pi} + (\rho < \pi))$
Lm+o	$V(\beta = \mu - 1)$
Lm+p	$V(\gamma = \dot{\pi} + (s < \pi))$
Lm+q	$V(\beta = \mu - 2)$
Lm+r	$V(\gamma = \dot{\pi} + (\tau < \pi))$
Lm+s)	$(\dot{\pi} + \rho)(Lm+ñ) - (\dot{\pi} + s)(Lm+p) = (\dot{\pi} + s)(Lm+p) - (\dot{\pi} + \tau)(Lm+r)$.
Lm+t	$(\dot{\pi} + \tau)(Lm+r) - \pi = \varphi \cdot [(\dot{\pi} + \rho)(Lm+ñ) - (\dot{\pi} + s)(Lm+p)]$

———

$V(\alpha = \nu) \wedge V(\beta = \mu - 2 - \varphi)$

Lm+t $(\dot{\pi} + \tau)(Lm+r) - \pi \neq \varphi \cdot [(\dot{\pi} + \rho)(Lm+ñ) - (\dot{\pi} + s)(Lm+p)]$

———

$\neg V(\alpha = \nu)$

REGLA 8.- REGLA DE ELIMINACION DE ALTERNATIVAS (R.E.A.)

$V(\alpha = \nu) \vee V(\alpha = 2\nu) \vee V(\alpha = 3\nu) \vee \ldots \vee V(\alpha = \mu \cdot \nu) \vee V(\alpha = (\mu+1) \cdot \nu)$
$V(\alpha < \mu \cdot \nu)$
———
$V(\alpha = \nu) \vee V(\alpha = 2\nu) \vee V(\alpha = 3\nu) \vee \ldots \vee V(\alpha = (\mu - 1) \cdot \nu)$

REGLAS 9 y 10.- REGLAS DE SIMPLIFICACION Y PRODUCTO. (R.Simpl.) (R. Prod.)

R.Simp.-
$V(\alpha = \nu) \wedge V(\beta = \mu)$
———
$V(\alpha = \nu)$ // $V(\beta = \mu)$

R.Prod.-
$V(\alpha = \nu)$
$V(\beta = \mu)$
———
$V(\alpha = \nu) \wedge V(\beta = \mu)$

REGLA 11.- REGLA DE DERIVACION DE PREMISA. (R.PMSA.)

$V(\alpha = \nu)$
$V(\beta = \mu)$
PREMISA
———
$V(\alpha = \nu) \wedge V(\beta = \mu)$

IV.- EXPLICACION DEL SENTIDO DE LAS REGLAS DE TRANSFORMACION.-

REGLA 1.- Si tenemos demostrada una proposición que afirma que el cardinal de "α" es ν, y tenemos demostrado que el cardinal de "β" es μ, podemos considerar demostrado que el cardinal de "$\alpha \cup \beta$" es $\nu + \mu$.

REGLA 2.- R.R.1.- Si tenemos demostrada una proposición que afirma que el cardinal de "$\alpha \cup \beta$" es ν, y tenemos demostrada tambien la proposición que afirma que el cardinal de "α" es μ, podemos considerar demostrada la proposición que afirma que el cardinal de β es $\mu - \nu$.

R.R.2.- Si está demostrada la proposición de que el cardinal de "$\alpha \cup \beta \cup \gamma$" es ν, y la proposición de que el cardinal de α es μ o mayor que este número μ, y sabemos que la clase γ no es vacía, podemos considerar demostrado que el cardinal de β es menor que $\nu - \mu - 1$.

REGLA 3.- Si el cardinal de las clases "α" incluídas en la clase "K_α" es ν, y el cardinal de cada una de esas clases "α" es μ, podemos considerar demostrado que el "cardinal de precio" de la clase "K_α" en la que están incluídas las clases "α" es $\mu \cdot \nu$.

REGLA 4.- Si el "cardinal de precio" de la clase "K_α" es ν, y el cardinal de cada una de las clases "α" incluídas en "K_α" es μ, entonces el cardinal de la clase "K_α" es $\nu : \mu$.

REGLA 5.- R.MPLO.1.- Si el cardinal de "α" es múltiplo de ν, podemos considerar demostrado que el cardinal de "α" es ν, o 2ν, o 3ν, o... o $\mu \cdot \nu$.

R.MPLO2.- Si el cardinal de la clase "$\alpha \cup \beta$" es múltiplo de ν, y el cardinal de la clase "α" es también múltiplo de ν, podemos considerar demostrado que el cardinal de la clase "β" es tambien múltiplo de ν.

R.MPLO.3.- Si el cardinal de "α" es múltiplo de ν, y tambien lo es el cardinal de "β", podemos considerar demostrado que tambien es múltiplo de ν el cardinal de la clase "$\alpha \cup \beta$".

R.MPLO4.- Si el cardinal de "α" es múltiplo de ν, podemos considerar demostrado que tambien es múltiplo de ν el "cardinal de precio de K_α" $\prod\alpha$".

REGLA 6.- R.C.V.1.- Si el cardinal de la clase "$\alpha \cup \beta$" es ν, y la clase "β" no es vacía, entonces el cardinal de "α" es menor que ν.

R.C.V.2.- Si ni la clase "α", ni la clase "β" son vacías, podemos considerar demostrado que la clase "$\alpha \cup \beta$" no es vacía.

R.C.V.3.- Si la clase "K_α" no es vacía, podemos considerar demostrado que tampoco lo es la clase de "precio" de los "K_α", es decir la clase "$\prod\alpha$".

REGLA 7.- Si suponiendo que el cardinal de "α" es ν, y que el cardinal de "β" es μ, llegamos a la demostración de que el cardinal de "γ" es múltiplo de un número π, más otro número inferior a π; y suponiendo que el cardinal de "β" es $\mu - 1$, el cardinal de "γ" resultaría ser múltiplo de π más otro número inferior a π; y suponiendo que el cardinal de "β" es $\mu - 2$, el cardinal de "γ", resultara ser múltiplo de π más otro número inferior a π; si se da la condición de que la diferencia entre el cardinal de "γ" en el primer y segundo supuesto, es igual a la diferencia del cardinal de "γ" en el segundo y tercer supuesto, si el cardinal de "γ" en el último supuesto menos π, es igual a dicha diferencia (razón aritmética de la serie), multiplicada por un número φ, entonces podemos considerar demostrado que el cardinal de "α" es ν, y que el cardinal de "β" es $\mu - 2 - \varphi$.

Pero si el cardinal de "γ" en el último supuesto menos π, no es múltiplo de dicha diferencia (razón aritmética de la serie), entonces podemos considerar demostrado que el cardinal de "α" no es ν.

REGLA 8.- R.E.A..- Si tenemos probado que el cardinal de "α" es ν, o 2ν, o 3ν, o... o $\mu \cdot \nu$, o $(\mu+1) \cdot \nu$; y tenemos probado que el cardinal de "α" es menor que $\mu \cdot \nu$; entonces podemos considerar probado que el cardinal de "α", es ν, o 2ν, o 3ν, o... o $(\mu - 1) \cdot \nu$.

REGLAS 9 y 10.- R. Simp. y Prod. .- Si tenemos probado que que el cardinal de "α" es ν, y que el cardinal de "β" es μ; entonces podemos considerar probado que el cardinal de "α" es ν; y podemos tambien considerar probado que el cardinal de "β" es μ.

Por otra parte, si tenemos probado por una parte que el cardinal de "α" es ν, y que el cardinal de "β" es μ; entonces podemos considerar probado que el cardinal de "α" es ν y que el cardinal de "β" es μ.

REGLA 11.- R.PMSA.- Si suponiendo que el cardinal de "α" sea ν, y que el cardinal de "β" es μ, llegamos en el curso de la derivación a una premisa o a una fórmula ya probada fuera de supuestos, siempre que dentro del supuesto se utilicen en la demostración las proposiciones aquí supuestas, podemos considerar demostrado que el cardinal de "α" es ν, y que el cardinal de "β" es μ.

DEMOSTRACION.-

A.- NOMBRES DE CLASES.-

— Céntimos que vale un pájaro de o,o5 pesetas...... "A"
— Céntimos que vale un pájaro de 1,peseta.......... "B"
— Céntimos que vale un pájaro de 5 pesetas......... "C"
— Clase de los pájaros de o,o5 pesetas............. "C_A"
— Clase de los pájaros de 1 peseta................. "C_B"
— Clase de los pájaros de 5 pesetas................ "C_C"
— Precio en céntimos de los pájaros de o,o5 pts.... "P_A"
— Precio en céntimos de los pájaros de 1 peseta.... "P_B"
— Precio en céntimos de los pájaros de 5 pesetas... "P_C"

B.- DEMOSTRACION.-

P.1.- p ($C_A \cup C_B \cup C_C = 100$)
P.2.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 10.000 = \dot{1}00$)
P.3.- p ($A=5$)
P.4.- p ($B=100=\dot{1}00$)
P.5.- p ($C=500=\dot{5}00=\dot{1}00$)
P.6.- p ($C_A \neq \emptyset$) $\wedge$ p ($C_B \neq \emptyset$) $\wedge$ p ($C_C \neq \emptyset$)
7.- p ($P_B = \dot{1}00$) R.MPLO$_4$ Línea 4.
8.- p ($P_C = \dot{5}00 = \dot{1}00$) R. MPLO$_4$ Línea 5.
9.- p ($P_B \cup P_C = \dot{1}00$) R. MPLO3 Líneas 7 y 8.
10.- p ($P_A = \dot{1}00$) R. MPLO.$_2$ Líneas 2 y 9.
11.- p ($P_A=100$) v p ($P_A=200$) v p ($P_A=300$) v... v p($P_A= x.100$) R.MPLO$_1$ Línea 10.
12.- p ($C_A= 100:5=20$) v p ($C_A=40$) v... v p ($C_A= x.100:5$) R.D. Líneas 3 y 11.
13.- p ($C_B \neq \emptyset$) $\wedge$ p ($C_C \neq \emptyset$) R. Simp. Línea 6.
14.- p ($C_B \cup C_C) \neq \emptyset$) R.C.V.$_2$ Línea 13.
15.- p ($C_A < 100$) R.C.V.$_1$ Líneas 1, 14.
16.- p ($C_A= 20$) v p($C_A=40$) v p($C_A=60$) v p ($C_A=80$) R.E.A. L. 12,15.
17.- p ($P_C=500$) v p ($P_C=1000$) v p ($P_C= 1500$) v... v p($P_C= x.500$) R.MPLO$_1$ L.8
18.- p ($C_B \neq \emptyset$) Simp. L.6.
19.- p ($P_B \neq \emptyset$) R.C.V.$_3$ L. 18.
20.- p ($P_C < 10.000- 100- 1$) R.R.$_2$ L. 2,11,18.
21.- p ($P_C= 500$) v p($P_C= 1000$) v p ($P_C= 1500$) v ... v p ($P_C= 9.500$) R.E.A. L. 17,20.
22.- p ($C_C= 1$) v p ($C_C=2$) v p($C_C=3$) v p ($C_C= 4$) v... v p($C_C= 19$) R.D. L. 5,21.
23.- p ($C_A= 20$)
24.- p ($P_A= 100$) R. Pr.$_1$ L.3,23.
25.- p ($C_C= 19$)
26.- p ($C_A \cup C_C= 39$) R.S.$_1$ L.23,25.
27.- p ($C_B= 61$) R.R.$_1$ L.1,26.
28.- p ($P_C= 9.500$) R.Pr.$_1$ L. 5,25.
29.- p ($P_B= 6.100$) R.Pr.$_1$ L. 4,27.
30.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 15.700$) R.S.$_1$ L. 24,28,29.
31.- p ($C_C = 18$)
32.- p ($C_A \cup C_C = 38$) R.S.$_1$ L. 23,31.
33.- p ($C_B = 62$) R.R.$_1$ L. 1,32.
34.- p ($P_C = 9.000$) R. Pr.$_1$ L. ~~4,34~~ 5,31
35.- p ($P_B = 6.200$) R.Pr.$_1$ L. 4,33.
36.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 15.300$) R.S.$_1$ L. 24,34,35.
37.- p ($C_C = 17$)
38.- p ($C_A \cup C_C = 37$) R.S.$_1$ L. 23,37.
39.- p ($C_B = 63$) R.R.$_1$ L.1,38.
40.- p ($P_C= 8.500$) R.Pr.$_1$ L. 5,37
41.- p ($P_B= 6.300$) R. Pr.$_1$ L. 4, 39.
42.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 14.900$) R.S.$_1$ L.24,40,41.
43.- 15.700-15.300= 15.300-14.900 Tablas de sumar y restar.
44.- 14.900- 10.000 $\neq \dot{4}00$ Tablas de dividir.
45.- $\neg$ p ($C_A= 20$) R.S.N. Líneas 23 a la 44.
46.- p ($C_A= 40$)
47.- p ($P_A= 200$) R.Pr.$_1$ L. 3,46.
48.- p ($C_C= 19$)
49.- p ($C_A \cup C_C= 59$) R.S.$_1$ L.46,48.
50.- p ($C_B= 41$) R.R.$_1$ L. 1,49.
51.- p ($P_C= 9.500$) R.Pr.$_1$ L.5, 48.
52.- p ($P_B= 4.100$) R.Pr.$_1$ L. 4,50.
53.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 13.800$) R.S.$_1$ L. 47,51,52.
54.- p ($C_C= 18$)
55.- p ($C_A \cup C_C = 58$) R.S.$_1$ L. 46,54.
56.- p ($C_B= 42$) R.R.$_1$ L. 1,55.
57.- p ($P_C = 9.000$) R.Pr.$_1$ L.5,54.
58.- P ($P_B = 4.200$) R.Pr.$_1$ L. 4,56.
59.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 13.400$) R.S.$_1$ L. 47,57,58.
60.- p ($C_C = 17$)
61.- p ($C_A \cup C_C = 57$) R.S.$_1$ L. 46,60
62.- p ($C_B = 43$) R.R.$_1$ L.1,~~444~~ 61.
63.- p ($P_C = 8.500$) R.Pr.$_1$ L. 5,60.
64.- p ($P_B = 4.300$) R.Pr.$_1$ L.4,62.
65.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 13.000$) R.S.$_1$ L. 47,63,64.
66.- 13.800-13,400= 13.400-13.000 Tablas de sumar y restar.
67.- 13.000- 10.000 $\neq \dot{4}00$ Tabla de dividir y de restar.
68.- $\neg$ p ($C_A = 40$) R.S.N. Líneas 46 a la 67.
69.- p ($C_A= 60$)
70.- p ($P_A= 300$) R.Pr.$_1$ L. 3, 69.
71.- p ($C_C= 19$)
72.- p ($C_A \cup C_C= 79$) R.S.$_1$ L. 69,71.
73.- p)($C_B= 21$) R.R.$_1$ L. 1,72.
74.- p ($P_C= 9.500$) R.Pr.$_1$ L. 5,71.
75.- p ($P_B= 2.100$) R.Pr.$_1$ L. 4. 73.
76.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 11.900$) R.S.$_1$ L. 70,74,75.
77.- p ($C_C = 18$)
78.- p ($C_A \cup C_C) = 78$) R.S.$_1$ L. 69,77.
79.- p ($C_B= 22$) R.R.$_1$ L. 1,78
80.- p ($P_C= 9.000$) R.Pr.$_1$ L. 5,77
81.- p ($P_B= 2.200$) R.Pr.$_1$ L.4, 79.
82.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 11.500$) R.S.$_1$ L. 70, 80, 81.
83.- p ($C_C= 17$)
84.- p ($C_A \cup C_C = 77$) R.S.$_1$ L. 69,83.
85.- p ($C_B = 23$) R.R.$_1$ L . 1,84.
86.- p ($P_C = 8.500$) R.Pr$_1$ L. 5,83.
87.- p ($P_B = 2.300$) R. Pr.$_1$ L. 4. 85.
88.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 11.100$) R.S.$_1$ L. 70, 86,87.
89.- 11.900-11500 = 11.500-11.100. Tablas de sumar y restar.
90.- 11.100- 10.000 $\neq \dot{4}00$ Tablas de dividir y de restar.
91.- $\neg$ p ($C_A = 60$) R.S.N. L. 69-90.
92.- p ($C_A= 80$)
93.- p ($P_A= 400$) R. Pr.$_1$ L. 3,92.
94.- p ($C_C = 19$)
95.- p ($C_A \cup C_C = 99$) R.S.$_1$ L. 92,94.
96.- p ($C_B = 1$) R.R.$_1$ L. 1, 95
97.- p ($P_C = 9.500$) R.Pr.$_1$ L. 5, 94.
98.- p ($P_B = 100$) R. Pr.$_1$ L. 4, 96.
99.- p ($P_A \cup P_B \cup P_C = 10.000$) R. S.$_1$ L. 93, 97, 98.
100.- p ($C_A = 80$) p ($C_C = 19$) R. PMSA. L. 92-99.
101.- p ($C_A \cup C_C= 99$) R.S.$_2$ L. 100
102.- p ($C_B = 1$) R.R.$_1$ L. 1, 101.
103.- p ($C_A= 80$) $\wedge$ p ($C_B = 1$) $\wedge$ p ($C_C = 19$). R. Prod. L. 100, 102.

JULIAN VELARDE LOMBRAÑA
Oviedo

Si a algunos la definición de "Lógica" como "Teoría de la deducción" nos parece, a lo más, una sinécdoque, supongo que la inversa es cierta y no suscita desacuerdo. En dicho supuesto se apoya el razonamiento que sigue y, por consiguiente, la pretensión de ofrecer una argumentación "lógica" en la resolución del problema.

Planteamos el problema como un problema de deducción. En cuanto tal, consta de una serie de premisas (axiomas) que vienen dados en la formulación del problema y que vamos a explicitar:

(I) CLASES Y ELEMENTOS:

Existen dos clases de elementos: La clase de los pájaros, que denominamos α, y la clase de las pesetas, que denominamos β. De estas clases quedan abstraidas otras propiedades (color,figura, peso, etc.) que no sean las numéricas. Sólo en cuanto clases de números (número de pájaros, número de pesetas) son pertinentes para la resolución del problema.

Las clases α y β, en cuanto clases numéricas, incluyen otras clases. En α están incluidas las clases:

A = Clase (número) de pájaros de 0,05 pts.
A′= " " " " " 1 "
A′′= " " " " " 5 "

En β están incluidas las clases siguientes:

B = Clase (número) de pts. para pagar A
B′ = " " " " " " A′
B′′= " " " " " " A′′

Cada A consta de dos elementos, que representamos por X_i (i = 1,2) con sus respectivos apóstrofos. De modo análogo, cada B consta de dos elementos, que representamos por Y_i (i = 1,2), con sus respectivos apóstrofos.

Y, finalmente, cada A incluye otras dos clases: a_1, a_i; a_2, a_j; a_3, a_k respectivamente. De modo análogo, cada B incluye dos clases: b_1, b_i; b_2, b_j; b_3, b_k. Las $\underline{a}$ y las $\underline{b}$ con subíndice numérico son clases de las unidades. Las $\underline{a}$ y las $\underline{b}$ con subíndice literal son clases de las decenas.

Cada una de estas clases $\underline{a}$, $\underline{b}$ consta de un sólo elemento, que representamos respectivamente por $\underline{x}$ e $\underline{y}$ con los correspondientes subíndices. Así, por ejemplo, x_3 representa el elemento de la clase a_3; y_i representa el elemento de la clase b_i. La argumentación exige, en algunos casos, distinguir el elemento perteneciente a una clase unitaria de dicha clase.

(II) RELACIONES Y OPERACIONES ENTRE CLASES Y ELEMENTOS:

Entre las clase descritas median relaciones definidas por:

(1) La naturaleza misma de esas clases: Clases de números pares o impares, que, sometidos sus elementos a operaciones, forman otras clases determinadas. En concreto, aquí, estas clases (pares - impares) serán sometidas a la operación suma, que determina las siguientes relaciones entre las clases y llamaremos leyes de la paridad:

(a) $\mathcal{A}$ es par o (exclusivo) $\mathcal{A}$ es impar

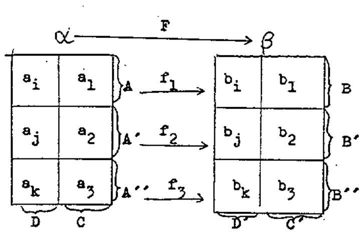
(b)

+	par	impar
par	par	impar
impar	impar	par

(2) Las funciones definidas entre esas clases a diferentes niveles que es preciso explicitar.

La solución del problema consiste en determinar la naturaleza (numérica) de cada clase.

La representación gráfica del planteamiento, hasta aquí descrito, es la siguiente:



(III) DETERMINACION DE LAS CLASES:

(A) Axiomas incluidos en la formulación del problema:

(I) Hay que comprar pájaros de las tres clases, A, A′ y A′′. Esto es, (I) $A \cap A' \cap A'' \neq \emptyset$; (I′) $B \cap B' \cap B'' \neq \emptyset$.

(II) $A \cup A' \cup A'' = \alpha$. (II′) $X_i + X_i' + X_i'' = 100$

(III) $B \cup B' \cup B'' = \beta$. (III′) $Y_i + Y_i' + Y_i'' = 100$

(IV.1) $a_1 \cup a_2 \cup a_3 = C$ (y C es par). (IV.2) $b_1 \cup b_2 \cup b_3 = C'$ (y C′ es par). (IV.3) $a_i \cup a_j \cup a_k = D$. (IV.4) $b_i \cup b_j \cup b_k = D'$.

(B) Inferencias:

1. f_1 es una aplicación de A sobre B. B es una clase de números naturales (pesetas). Esto determina que:

1.1 Las clases incluidas en A son pares. Más enconcreto, $x_1 = 0$ Y (1), junto con (I′) y (II′) determina:

1.2 a) $2 \leq x_i \leq 8$

b) $y_i = 0$. Y, por lo tanto, b_i es par

c) $y_1 > 0$. Por lo tanto,

1.3 $y_1 + y_2 + y_3 = 10$. Y, por lo tanto, C′ es par.

1.4 $y_i + y_j + y_k = 9$. Y, por lo tanto, D′ es impar.

2.- f_3 determina:

Junto con (III′)

2.0 $x_k = 0$ ó $x_k = 1$

2.1 Si a_3 es par, entonces $y_3 = 0$ (por f_3)

2.2 Si $y_3 = 0$, entonces b_1 y b_2 son ambas pares o ambas impares (leyes de la paridad/ La suma de las dos ha de dar par (= 10), ya que el cero, como la clase par, funciona como elemento neutro de la suma).

2.3 Si b_1 y b_2 son ambas pares, entonces $y_1 = 2$ ó $y_1 = 4$ (por f_1 y (1.2a).

2.4 Si $y_1 = 2$, entonces: a) $y_2 = 8$ (por 1.3 y 2.2)

b) $x_i = 4$ (por f_1)

c) Si $y_2 = 8$, entonces $x_2 = 8$ (por f_2:func. idéntica)

d) Si $x_2 > 0$, entonces valen (1.3) y (1.4) para las $\underline{x}$ espectivas. Por lo tanto,

e) $x_3 = 2$ (por 1.1 y 2.4d).

f) $4 \leq x_j \leq 5$ (por 2.4b, 2.0 y 24d)

2.5 Supuesto lo anterior, dado que a_i es par (1.1) y b_i es par (1.2b), entonces: a) a_j y a_k han de ser una par y otra impar (Por leyes paridad)

b) Igualmente b_j y b_k

c) a_j y b_j poseen la misma paridad (por f_2)

d) Por lo tanto, a_k y b_k han de poseer la misma paridad.

Dado (2.0), esto es, $x_k = 0$ w $x_k = 1$, tenemos:

2.6 Si $x_k = 1$, entonces si $x_3 = 2$ (por 2.4d), entonces y_k adquiere una paridad distinta de x_k.

2.7 Por lo tanto, $x_3 \neq 2$ ó $x_k \neq 1$

2.8 Si $x_k = 0$, entonces si $x_3 = 2$, entonces y_k adquiere una paridad distinta de x_k.

2.9 Por lo tanto, de $x_3 \neq 2$ ó $x_k \neq 0$.

2.10 De (2.7) y (2.9) y (2.0) se sigue que $x_3 \neq 2$

2.11 Y si $x_3 \neq 2$, entonces $x_2 \neq 8$ e $y_2 \neq 8$ e $y_1 \neq 2$ (por modus tollens)

2.12 Volviendo, pues, a la segunda parte de (2.3): Si $y_1 = 4$, entonces:

a) $y_2 = 6$ (por (1.3) y (2.1).

b) $x_2 = 6$ (por f_2)

c) $x_i = 8$ (por f_1)

2.13 Si $x_2 > 0$, entonces valen (1.3) y (1.4) para las $\underline{x}$ respectivas.

2.14 Por lo tanto, a) $x_3 = 4$ (por 2.13 y 2.12b)

b) $x_j \leq 1$ (por 2.13 y 2.12c)

2.15 Si $x_i = 8$, entonces $x_j + x_k = 1$ (por 2.13). Y, por lo tanto:

a) $x_j \leq 1$

b) $y_j \leq 1$ (por f_2)

c) $x_k \leq 1$

d) $y_k \leq 7$ (por f_3 y 2.14a).

2.16 Por lo tanto, $y_j + y_k \leq 8$

2.17 Pero $y_j + y_k = 9$ (por 1.4 y 1.2b).

2.18 Por lo tanto, $x_i \neq 8$. Por lo tanto $y_1 \neq 4$

2.19 En consecuencia, $y_1 \neq 2$ (por 2.11) e $y_1 \neq 4$ (por 2.18)

2.20 Por lo tanto, b_1 y b_2 no son ambas pares. Volvemos, así, a la segunda parte de 2.2.

2.21 Supongamos la segunda parte de (2.2): b_1 y b_2 son ambas impares

2.22 Si b_2 es impar, entonces a_2 es impar. Y, por lo tanto, a_1 (par)(por 1.1) + a_2 (impar)(supuesto) + a_3(par)(supuesto) $\neq$ par (C). Pero C es par (por 2.13).

2.23 Por lo tanto, b_1 y b_2 no son ambas impares.

2.24 b_1 b_2 no son ambas pares (por 2.20) ni ambas impares (por 2.23). Por lo tanto, volviendo a (2.2), $y_3 \neq 0$.

2.25 Si $y_3 \neq 0$, entonces a_3 no es par (por modus tollens)

3 Por lo tanto a_3 es impar (leyes de la paridad más 1.1).

3.1 Si a_3 es impar, entonces: a) $y_3 = 5$. Y, por lo tanto b_3 impar (por f_3)

b) a_2 es impar (leyes de la paridad y (1.1).

c) $x_3 > 0$

3.2 Si $x_3 > 0$, entonces valen (1.3) y (1.4) para las respectivas x.

3.3 Si a_2 es impar, entonces b_2 es impar (por f_2)

3.4 Si b_2 es impar, entonces b_1 es par (leyes de la paridad y 3.1a).

3.5 Si b_1 es par, entonces $y_1 = 2$ ó $y_1 = 4$ (por f_1 y 1.2a).

3.6 Si $y_1 = 2$, entonces: a) $y_2 = 3$ (por 1.3 y 3.1)

b) $x_i = 4$ (por f_1)

3.7 Si $y_2 = 3$, entonces $x_2 = 3$ (por f_2)

3.8 Si $x_2 = 3$, dado que $x_1 = 0$ (por 1.1), entonces $x_3 = 7$ (por 3.2)

3.9 Si a_i es par (por 1.1) y a_j tiene la misma paridad que b_i (por f_2) y b_i es par (por 1.2b), entonces a_k y b_k han de tener la misma paridad.

3.10 Pero $f_3(a_k, 7)$ cambia la paridad de b_k respecto de a_k. Esto es, por f_3 resulta que si a_k es par, entonces b_k es impar y recíprocamente.

3.11 Por lo tanto, $y_1 \neq 2$. Volvemos, pues, a (3.5)

3.12 Si b_1 es par, entonces $y_1 = 4$.

3.13 Si $y_1 = 4$, entonces: a) $y_2 = 1$ (por 1.3 y 3.1a)

b) $x_i = 8$ (por f_1)

3.14 Si $y_2 = 1$, entonces $x_2 = 1$ (por f_2)

3.15 Si $x_2 = 1$, dado que $x_1 = 0$ (por 1.1), entonces $x_3 = 9$ (por 3.2)

3.16 Si $x_i = 8$, entonces $x_k = 1$ ó $x_j = 1$ (por 3.2)

3.17 Si $x_j = 1$, entonces: a) $x_k = 0$ (por 3.2)

b) $y_j = 1$ (por f_2)

3.18 Si $x_k = 0$, entonces, dado (3.15), $y_k = 4$ (por f_3)

3.19 Si $y_i = 1$, dado que $y_i = 0$ (por 1.2b), entonces $y_k \neq 4$

3.20 Por lo tanto, $x_j \neq 1$. Por lo tanto, volviendo a (3.16), si $x_i = 8$, entonces $x_k = 1$.

3.21 Si $x_k = 1$, entonces: a) $x_j = 0$ (por 3.13b y 3.2)

b) $y_k = 9$ (por f_3 y 3.15)

3.22 Si $x_j = 0$, entonces $y_j = 0$ (por f_2)

En conclusión, la determinación numérica de las doce clases mencionadas es la siguiente:

1) $x_1 = 0$ (por 1.1)
2) $y_i = 0$ (por 1.2b)
3) $y_3 = 5$ (por 3.1a)
4) $y_1 = 4$ (por 3.12)
5) $y_2 = 1$ (por 3.13a)
6) $x_i = 8$ (por 3.13b)
7) $x_2 = 1$ (por 3.14)
8) $x_3 = 9$ (por 3.15)
9) $x_k = 1$ (por 3.20)
10) $x_j = 0$ (por 3.21a)
11) $y_k = 9$ (por 3.21b)
12) $y_j = 0$ (por 3.22)

Gráficamente:

8	0
0	1
1	9

0	4
0	1
9	5

GUSTAVO BUENO MARTINEZ
Oviedo

1. El problema podría plantearse como un problema de clases y de clases no meramente distributivas (totalidades $\mathfrak{T}$) sino tambien atributivas (totalidades T).

Podrían, por otro lado, considerarse a los pájaros y a las monedas como clases externas, aunque coordinadas por relaciones funcionales (de contenido aritmético). A efectos de cálculo, los resultados serían igualmente válidos que cuando consideremos a los pajaros y a las monedas no ya como clases exteriores, sino como aspectos de una misma clase, aspectos correspondientes a la intensión y a la extensión, por medio de las cuales suele caracterizarse cualquier clase determinada. En efecto, el número entero de cada conjunto de pájaros de un determinado precio, puede interpretarse como la extensión de una clase cuya intensión estuviese representada por el precio mismo. Las clases A,B,C están definidas intensionalmente por el precio de cada uno de sus elementos. (La intensión es aquí, pues, una propiedad distributiva, puesto que la nota --el precio-- afecta a cada elemento de la clase, de la misma manera que ocurre con las "clases estadísticas", cuyos elementos se definen por una media). Las clases A,B y C quedan extensionalmente indeterminadas en el planteamiento del problema. Y éste puede hacerse consistir en un problema de determinación del cardinal o extensión de cada una de las clases intensionalmente definidas. (Cada clase es una totalidad de totalidades).

2. Llamemos T_a a las totalidades extensionales y T_m a las intensionales (utilizamos la letra "T" en la medida en que nos referimos a totalidades atributivas: no solo la extensión, sino la intensión puede ser tratada acumulativamente en nuestro caso).

Según esto, los símbolos $T_a(A)$, $T_a(B)$, $T_a(C)$, $T_m(A)$, $T_m(B)$, $T_m(C)$ designan las totalidades elementales de primer órden.

A partir de estas, formaremos totalidades de segundo órden (totalidades aditivas, en nuestro caso), tales como $T_a(A,B)$, $T_m(A,C)$, etc.etc. Las reglas de formación son similares a la siguiente: $T_a(A,B) = T_a(A) + T_a(B)$.

3. Los datos o premisas del problema pueden, según los conceptos precedentes, considerarse como la información que es preciso conocer acerca de las relaciones (razones) entre la intensión y la extensión de cada clase elemental, asi como acerca de las totalidades de tercer ordden, a fin de pòder proceder por razonamiento a la determinación de la extensión o cardinal de cada clase elemental.

I. $T_a(A,B,C) = T_m(A,B,C) = 100$

II.1 - $T_m(A) / T_a(A) = 5$

II.2 - $T_m(B) / T_a(B) = 1$

II.3 - $T_m(C) / T_a(C) = 0{,}05$

Estas premisas contienen algunos corolarios triviales. Por ejemplo, de ellas se infiere que cada una de las totalidades elementales T_a ha de tener un cardinal menor que 100 (si alguna de estas totalidades ocupase la clase de tercer orden, no se cumpliría la condición de que ninguna de las clases sea vacia).

Los más importantes corolarios son los siguientes:

C-II-1 $T_a(A) < 20$

C-II-3 $T_m(C) < 5$

4. En virtud de un principio de naturaleza lógica (aunque la materia sea aquí aritmética), la "propiedad uniforme", podemos transformar la premisa I, por medio de la premisa II-2, eliminando la clase B. En efecto, puesto que II-2 nos presenta a B como una clase cuya razón intensión/extensión es 1, podemos concluir que la ecuación I se cumple si y solo si se cumple la siguiente:

I'. $T_a(A,C) = T_m(A,C)\ [< 100]$

Por consiguiente, el problema inicial será posible si I' tiene soluciones --con lo cual hemos rebajado el problema a un nivel de clases de segundo orden. En efecto, cualquiera que sea el cardinal de $T_a(A,C)$, igual al valor de $T_m(A,C)$, la diferencia hasta 100 se completará con los valores enteros de $T_a(B) = T_m(B)$, que se agregarán a ambos miembros de la premisa, manteniéndose la igualdad de modo "autoformante" (cuanto a la cantidad).

5. Una vez reducida la premisa I a la I', la cuestión que se nos abre es la siguiente: ¿Cabe un solo valor o son posibles varios valores para que se cumpla la ecuación $T_a(A,C) = T_m(A,C)$?

Es la cuestión de la unicidad. ¿Cabe demostrar que existe un único valor sin necesidad de ensayar todos los casos posibles?. Si esta demostración no fuera posible, o simplemente, si no nos interesase considerarla, solo quedaría el camino de ensayar todas las alternativas posibles, aplicando las leyes de las proposiciones disyuntivas. La unicidad eventualmente obtenida por este procedimiento (formalizado o sin formalizar) sería en todo caso, "empírica".

Creemos que es posible demostrar la unicidad de la solución por un razonamiento de naturaleza lógica (aunque sobre "materia" aritmética). Es el siguiente:

En la ecuación I' podemos ir variando T_a (A) de unidad en unidad --no así T_m (A), porque, según la función II-1 variará de 5 en 5. Asimismo, podemos ir variando T_m (C) de unidad en unidad --pero no T_a (C), porque según la función II-3 variará de 20 en 20.

Por consiguiente, dado que la variación de unidad en unidad es posible en terminos pertinentes a la ecuación I', podemos considerar ordenados en serie natural los valores T_a(A) y T_m(C). Dada la naturaleza directa de la función II, las series T_a y T_m de referencia crecen y decrecen a la vez, aunque según diversos "ritmos".

Esto supuesto, podemos introducir ya un lema de unicidad hipotética, que formulamos del siguiente modo:

t_1:"Si hay un punto de la serie constituida por los valores de referencia que satisface la ecuación II, no puede haber otro punto que la satisfaga":

La prueba de este lema es de naturaleza lógica (aunque su materia sea aritmética). En efecto: estamos ante series de valores que se desarrollan a ritmos característicos, y diversos entre si. Luego si suponemos un valor comun (intersección), no podrá ya darse ningún otro valor de intersección, ni en la dirección ascendente, ni en la descendente, en virtud de la misma diversidad de ritmos prescrita por las premisas del problema.

El lema t_1 puede tomar una forma más determinada intensionalmente, aunque no menos general:

t'_1:"Para cada punto de la serie que satisface a la ecuación II, no existe ninguno inferior que la satisfaga".

5. Los lemas t_1 y t'_1 nos ponen delante de una situación interesante en órden a explorar las conexiones entre Lógica y Aritmética, a propósito del paso del ordo inventionis al ordo doctrinae. Porque los componentes lógicos del tratamiento que estamos dando al problema parecen jugar un papel principal en cuanto principios intermedios que intervienen formalmente en su desarrollo. La eliminación de la clase B (punto 4) es el resultado de un principio de naturaleza lógica (autoformante). El lema de unicidad, se basa tambien en un principio lógico, a saber, la identidad autoformante de todas las soluciones posibles. Por último: tambien es lógico el motivo por el mcual una vez encontrada una solución rechazamos las restantes (decimos "lógico", por contraposición a "aritmético"). Mientras en los procedimientos de alternativas, cada ensayo comporta una operación aritmética (esté o no formalizada), en el procedimiento que se apoya en el lema de unicidad no oourre esto (aunque se dé el caso de que la solución aparezca despues de ensayados todos los valores posibles). Mientras en las soluciones aritméticas las relaciones han de intervenir en cada opción directamente, en la solución lógica las relaciones no validas solo intervienen oblicuamente, a traves de la única solución efectiva.

6. Método de resolución del problema. En virtud del lema t'_1, ensayaremos los valores superiores posibles (según el punto 3) de T_a (A)=19 y de T_m (C)= 4.

Según las premisas:

Si T_a (A) = 19, entonces T_m (A) = 95

Si T_m (C) = 4 , entonces T_a (C) = 80

Estos valores máximos satisfacen la ecuación I' (que relaciona clases de segundo orden formadas por totalidades cruzadas):

$$T_a\ (A) + T_a\ (C) = T_m\ (A) + T_m\ (C)$$

$$\frac{(19) + (80)}{(99)} = \frac{(95) + (4)}{(99)}$$

Por consiguiente (pasando a la premisa I):

T_a (B) = T_m (B) = 1

Y, en virtud del lema de unicidad (en cualquiera de sus formas, la distributiva t y la atributiva t'), si los valores (máximos) de A y C satisfacen la ecuación I', ya no podrán satisfacerla otros valores. No es preciso, por tanto, ensayar otras combinaciones:

T_a (A)	T_m (A)	T_m (C)	T_a (C)
19	95	4	80
18	90	3	60
17	85	2	40
16	80	1	20

JUAN GONZALEZ MUÑIZ
(Avilés

1. La serie de pájaros de la clase A que pueden comprarse y su precio es: (1 pájaro, 5 pts), (2,10), (3,15), (4,20), (5,25), (6,30), (7,35), (8,40), (9,45), (10,50), (11,55), (12,60), (13,65), (14,70), (15,75), (16,80), (17,85), (18,90), (19,95), (20,100).

La serie de pájaros que pueden comprarse de la clase C y su valor es:

(20 pajaros, 1 pts), (40,2), (60,3), (80,4), (100,5)

ya que su valor debe ser un número de pesetas entero.

2. Estas dos series son las que deben combinarse entre si de tal modo que el numero de pájaros de la clase A+número de pajaros de la clase C sea igual al valor de los pájaros de la clase A + valor de los pájaros de la clase C. De este modo el precio medio de los pajaros de ambas clases sería de 1 pts., de acuerdo con el precio medio de la compra que es de 1 pts. por pájaro. Luego bastará con añadir los pájaros de la clase B necesarios para completar los 100 ya que estos no alterarán el precio medio de los pajaros.

3. Combinando cada par (pájaros, valor) de la clase A con los pares de la clase C vemos que sólo se da un caso en que se cumple que: nº pájaros de A + nº pájaros de C = valor de A + valor C. Estos dos pares son: (19,95) (80,4). 19 pajaros A + 80 de C = 95 pts + 4 pts.

Luego el precio medio es de 1 pts. por pajaro. Ahora añadimos de la clase B 1 pajaro cuyo valor es de 1 pta. y la solución será:

19 pájaros de 5 pta ----------	95 pts
1 pájaro de 1 pta ----------	1 pta
80 pájaros de 0,05 pta ---------	4 pta
TOTAL 100 Pájaros	100 pts.